

М.С. Красс, Б.П. Чупрынов

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям 060400 «Финансы и кредит»,
060500 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»
060600 «Мировая экономика», 351200 «Налоги и обложение»*



МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
2007

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631я73
К78

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра математических методов анализа экономики
экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова;

Д.Г. Орловский,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского инженерно-физического института
(государственного университета)

Красс М.С.

К78 Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.: ил.

ISBN 978-5-279-03071-2

Изложены математические дисциплины, необходимые в высшем экономическом образовании, согласно государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования. Приведены основные элементы математической статистики, методы оптимизации в экономике, основы эконометрики. Учебник содержит методы и модели, используемые в наиболее актуальных современных аспектах экономики: приложения теории массового обслуживания, расчеты рисков, динамика эколого-экономических систем, методы финансовой математики.

Для студентов, магистрантов, аспирантов и преподавателей экономических и смежных технических специальностей вузов, а также для слушателей, получающих второе высшее образование.

К $\frac{1602020000 - 070}{010(01) - 2007}$ без объявл.

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631я73

ISBN 978-5-279-03071-2

© Красс М.С., Чупрынов Б.П., 2007
© Оформление. Издательство
«Финансы и статистика», 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	11
Глава 1. Основные положения теории вероятностей	11
1.1. Основные понятия теории вероятностей	11
1.1.1. Некоторые формулы комбинаторики	11
1.1.2. Виды случайных событий	13
1.1.3. Классическое определение вероятности	13
1.2. Теорема сложения вероятностей	15
1.2.1. Несовместные события	15
1.2.2. Полная группа событий	16
1.2.3. Противоположные события	16
1.3. Теорема умножения вероятностей	17
1.3.1. Произведение событий и условная вероятность	17
1.3.2. Независимые события	19
1.4. Обобщения теорем сложения и умножения	21
1.4.1. Появление только одного из независимых событий	21
1.4.2. Теорема сложения вероятностей совместных событий	22
1.4.3. Формула полной вероятности	23
1.4.4. Формулы Байеса	24
1.5. Схема независимых испытаний	26
1.5.1. Формула Бернулли	26
1.5.2. Локальная теорема Лапласа	27
1.5.3. Интегральная теорема Лапласа	28
1.5.4. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности	31
Упражнения	32
Глава 2. Случайные величины	34
2.1. Случайные величины и законы их распределения	34
2.1.1. Виды случайных величин	34
2.1.2. Дискретные случайные величины	34
2.1.3. Биномиальное распределение	37
2.1.4. Распределение Пуассона	38
2.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин	38
2.2.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины	38
2.2.2. Свойства математического ожидания	39
2.2.3. Дисперсия дискретной случайной величины	41
2.2.4. Свойства дисперсии	43
2.2.5. Среднее квадратическое отклонение	44
2.2.6. Начальные и центральные моменты	46

2.3. Система двух случайных величин	47
2.3.1. Двумерная случайная величина	47
2.3.2. Корреляционный момент	49
2.3.3. Коэффициент корреляции	50
2.3.4. Линейная регрессия	51
2.4. Непрерывные случайные величины	52
2.4.1. Функция распределения и ее свойства	52
2.4.2. Плотность распределения вероятностей и ее свойства	55
2.4.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин	57
2.4.4. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных случайных величин	59
2.5. Основные распределения непрерывных случайных величин	59
2.5.1. Равномерное распределение	59
2.5.2. Нормальное распределение	61
2.5.3. Распределение χ^2 Пирсона	64
2.5.4. Распределение Стьюдента	64
2.5.5. Распределение Фишера	65
2.5.6. Асимметрия и эксцесс	65
Упражнения	68
Глава 3. Элементы математической статистики	70
3.1. Выборочный метод	70
3.1.1. Выборки	70
3.1.2. Способы отбора	71
3.1.3. Статистическое распределение выборки	71
3.1.4. Эмпирическая функция распределения	72
3.1.5. Полигон и гистограмма	74
3.2. Статистические оценки параметров распределения	75
3.2.1. Виды статистических оценок	75
3.2.2. Виды дисперсий	77
3.2.3. Эмпирические моменты	79
3.2.4. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения	80
3.3. Точечные оценки параметров распределения	81
3.3.1. Метод моментов	81
3.3.2. Метод наибольшего правдоподобия	82
3.4. Интервальные оценки параметров распределения	84
3.4.1. Доверительный интервал	84
3.4.2. Интервальные оценки математического ожидания нормального распределения	85

3.5. Статистические оценки статистических гипотез	88
3.5.1. Виды статистических гипотез	88
3.5.2. Общая схема проверки статистических гипотез	89
3.5.3. Типы статистических критериев проверки гипотез	90
3.6. Закон больших чисел	92
3.6.1. Неравенство Чебышева	92
3.6.2. Закон больших чисел	93
3.6.3. Центральная предельная теорема	93
3.7. Цепи Маркова	93
3.7.1. Основные понятия	93
3.7.2. Равенство Маркова	94
Упражнения	96
Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ	98
Глава 4. Расчеты экономических ситуаций	98
4.1. Графы, сети и их применение в экономике	98
4.1.1. Основные определения и характеристики граф	98
4.1.2. Плоские графы	104
4.1.3. Ориентированные графы	108
4.1.4. Построение минимального остовного дерева сети	110
4.1.5. Задача нахождения кратчайшего пути	113
4.1.6. Дерево решений	115
4.1.7. Сетевые графики	117
4.2. Основы управления рисками в экономике	127
4.2.1. Риски в экономике	127
4.2.2. Оптимизация портфелей банка	131
4.3. Теория массового обслуживания в экономике	137
4.3.1. Марковские процессы и потоки событий	138
4.3.2. Системы массового обслуживания	140
4.3.3. Одноканальная СМО с отказами	144
4.3.4. Многоканальная СМО с отказами	147
4.3.5. Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди	151
4.3.6. Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью	157
4.4. Элементы теории игр	160
4.4.1. Основные понятия	160
4.4.2. Графическое решение игр	164
4.4.3. Игры с природой	169
4.4.4. Применение игр с природой в экономике	171
4.4.5. Кооперативные игры	174
4.4.6. Позиционные игры	176
Упражнения	179

Глава 5. Математические модели в финансовых операциях	186
5.1. Проценты и процентные ставки	187
5.1.1. Простые проценты	187
5.1.2. Сложные проценты	199
5.1.3. Начисление процентов в условиях инфляции	211
5.2. Потоки платежей	214
5.2.1. Финансовые ренты	215
5.2.2. Определение параметров финансовой ренты	222
5.3. Применение математических моделей	225
5.3.1. Конверсия валюты и начисление процентов	225
5.3.2. Погашение задолженности частями	230
5.3.3. Выбор инвестиционных и коммерческих проектов	235
5.3.4. Модели операций с ценными бумагами	242
Упражнения	249
Глава 6. Линейное программирование	254
6.1. Некоторые теоремы линейного программирования	255
6.1.1. Формы модели задач	255
6.1.2. Основные определения	257
6.1.3. Некоторые теоремы линейного программирования	257
6.2. Графический метод решения задач	261
6.2.1. Алгоритм решения задач	261
6.2.2. Определение оптимального плана выпуска изделий	262
6.2.3. Экономический анализ задач	263
6.3. Симплексный метод	266
6.3.1. Теоретические основы и геометрическая интерпретация метода	267
6.3.2. Симплексные таблицы	269
6.3.3. Применение симплексного метода в экономике	270
6.3.4. Решение матричных игр симплексным методом	272
6.4. Двойственные задачи	275
6.4.1. Виды математических моделей двойственных задач	275
6.4.2. Решение двойственных задач	278
6.4.3. Экономический анализ задач с использованием теории двойственности	283
6.4.4. Применение теории двойственности в экономике	284
6.5. Транспортная задача	287
6.5.1. Закрытая транспортная задача	288
6.5.2. Открытая транспортная задача	296
6.5.3. Применение транспортных моделей в экономических задачах	299
6.6. Целочисленное программирование	301
6.6.1. Графический метод решения задач	301
6.6.2. Метод Гомори и его применение в экономических задачах	303

6.7. Задачи о назначениях с несколькими целевыми функциями . . .	306
6.7.1. Задача о назначениях	306
6.7.2. Задачи с несколькими целевыми функциями	311
6.8. Параметрическое линейное программирование	314
6.8.1. Линейное программирование с параметром в целевой функции	315
6.8.2. Линейное программирование с параметром в правых частях системы ограничений	320
6.8.3. Линейное программирование с параметром в целевой функции и правых частях системы ограничений	322
6.8.4. Транспортная параметрическая задача	324
Упражнения	330
Глава 7. Нелинейное программирование	343
7.1. Формулировка модели	343
7.1.1. Графический метод	344
7.1.2. Дробно-линейное программирование	348
7.1.3. Метод множителей Лагранжа	354
7.1.4. Выпуклое программирование	357
7.2. Динамическое программирование	364
7.2.1. Основные понятия	364
7.2.2. Применение метода функциональных уравнений в определении оптимальных сроков замены оборудования	365
7.2.3. Экономические задачи, решаемые методом динамического программирования	369
Упражнения	378
Раздел 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ	382
Глава 8. Обобщенные модели экономики	382
8.1. Аппарат производственных функций	382
8.1.1. Производственные функции	383
8.1.2. Основные характеристики производственных функций	386
8.1.3. Основные виды производственных функций	395
8.2. Модель потребительского выбора	399
8.2.1. Функция полезности	400
8.2.2. Задача потребительского выбора	402
8.2.3. Функции спроса	407
8.2.4. Модель Р. Стоуна	409
8.2.5. Уравнение Слуцкого	411
8.3. Некоторые модели управления запасами	414
8.3.1. Основная модель управления запасами	415
8.3.2. Модель производственных запасов	417
8.3.3. Модель запасов, включающая штрафы	418
8.3.4. Применение моделей управления запасами в экономике	420
Упражнения	423

Глава 9. Глобальные модели экономики	425
9.1. Общие модели экономики	425
9.1.1. Односекторная модель Леонтьева	425
9.1.2. Модель Солоу	428
9.1.3. Оптимальная постоянная норма накопления	431
9.2. Моделирование эколого-экономических систем	435
9.2.1. Эколого-экономические системы	435
9.2.2. Балансовые модели	439
9.2.3. Модели системной динамики	446
Раздел 4. ЭКОНОМЕТРИКА	454
Глава 10. Линейная и нелинейная регрессия	454
10.1. Линейная регрессия и корреляция	455
10.1.1. Двумерная регрессионная модель	455
10.1.2. Нормальная линейная регрессионная модель с одной переменной	457
10.2. Нелинейная регрессия и корреляция	466
10.2.1. Нелинейная регрессия	466
10.2.2. Нелинейная корреляция	471
10.3. Множественная регрессия и корреляция	474
10.3.1. Нормальная линейная модель множественной регрессии	474
10.3.2. Некоторые особенности множественной регрессии и корреляции	478
10.3.3. Отбор факторов и методы построения множественной линейной корреляционной и регрессионной зависимости	479
Упражнения	489
Глава 11. Прогнозирование экономических процессов	490
11.1. Классификация и виды временных рядов	490
11.1.1. Классификация экономических прогнозов	490
11.1.2. Виды временных рядов	491
11.2. Показатели динамики экономических процессов	496
11.2.1. Основные показатели динамики	496
11.2.2. Сглаживание временных рядов с помощью скользящей средней	498
11.2.3. Применение моделей кривых роста	502
11.2.4. Расчет доверительных интервалов прогноза, адекватность и точность моделей	508
Упражнения	513
Приложения	516
Ответы	525
Библиографический список	532
Предметный указатель	534

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый учебник написан на основе лекций, прочитанных авторами в течение последних лет в экономических вузах, в том числе и при подготовке слушателей второго высшего образования. В книгу вошли материалы, прошедшие практическую проверку при преподавании цикла математических дисциплин в экономических государственных и негосударственных вузах для различных форм обучения.

Поскольку в современном образовательном процессе в экономических вузах возрастает удельная доля математических методов в экономике и экономико-математического моделирования, в учебник включены соответствующие разделы, дающие достаточно полное представление об их теоретических и практических аспектах.

Структура книги выдержана в строгом соответствии с логикой представления материала: теория вероятностей и математическая статистика, математические методы, математические модели, финансовая математика, эконометрика. Впервые в учебник по математическим приложениям включена новая тема — проблемы моделирования эколого-экономических систем.

Приводимые в этих разделах методы и модели опираются на излагаемые в изданном ранее учебнике* основы математических дисциплин, что обуславливает единую логику изложения материала в целом: от основ математики до сложных приложений математических методов и моделей в экономике.

Учебник содержит почти все дидактические единицы Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по блоку математических дисциплин для экономических вузов и специальностей в области математических методов и моделей.

Изучение математических дисциплин и методов, составляющих основу современного аппарата моделирования в экономике, позволит будущему специалисту сформировать необходимые компоненты мышления — уровень, кругозор и культуру, которые понадобятся ему как для успешной работы, так и для совершенствования знаний и повышения его квалификации.

* *Красс М.С.* Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005.

При изложении материала авторы постарались сохранить сложившуюся терминологию и традиционные обозначения в формулировках задач, математических моделей и в решениях. Большая часть глав учебника содержит подборки задач и упражнений для самостоятельного выполнения.

Учебник рассчитан на самую широкую экономическую аудиторию: студентов, аспирантов, преподавателей, слушателей магистратуры, научных сотрудников. Он может быть использован как в университетах, так и в учебном процессе вузов для различных форм обучения по программам высшего экономического образования: очной, вечерней и дистанционной, а также при получении второго высшего образования.

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Существует три вида событий: достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* относительно комплекса условий S называется событие, которое обязательно произойдет при выполнении этого комплекса условий. Например, если гладкий желоб с лежащим внутри него тяжелым шариком наклонить, то шарик обязательно покатится по желобу в сторону наклона. *Невозможным* называется событие, которое заведомо не произойдет при выполнении комплекса условий S . Например, из герметически изолированного сосуда вода вылиться не может. *Случайным* относительно комплекса условий S называется событие, которое при выполнении указанного комплекса условий может либо произойти, либо не произойти. Например, если уронить фарфоровую чашку на пол, то она может как разбиться, так и остаться неповрежденной.

Теория вероятностей имеет дело со случайными событиями. Однако она не может предсказать, произойдет единичное событие или нет. Теория вероятностей изучает *вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий*. Ее методы получили широкое распространение в различных областях естествознания и в прикладных технических задачах. Теория вероятностей легла в основу теории массового обслуживания и теории надежности. В последние годы аппарат теории вероятностей активно используется в экономике.

1.1. Основные понятия теории вероятностей

1.1.1. Некоторые формулы комбинаторики

Пусть задано конечное множество элементов некоторой природы. Из них можно составлять определенные комбинации, количество которых изучает комбинаторика. Некоторые ее формулы используются в теории вероятностей; приведем их.

Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности n разных элементов и отличающиеся только порядком их расположения, называются *перестановками*. Число всех возможных перестановок определяется произведением чисел

от единицы до n :

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! \quad (1.1)$$

Пример 1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 с использованием всех указанных цифр в каждом числе?

Решение. Искомое число $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Комбинации по m элементов, составленные из n разных элементов ($m \leq n$), отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком, называются *размещениями*. Число всевозможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1). \quad (1.2)$$

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из семи разных цифр при отсутствии среди них нуля?

Решение. Искомое количество цифр

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n разных элементов ($m \leq n$) и различающиеся хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями*. Число сочетаний определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.3)$$

Соответственно справедливы следующие формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad A_n^m = P_m C_n^m. \quad (1.4)$$

Первую из формул (1.4) удобно использовать, в частности, в расчетах, когда $m > n/2$.

Напомним формулу бинома Ньютона, в которой участвуют коэффициенты (1.3):

$$(p+q)^n = C_n^m p^n q^0 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + \dots + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^0 p^0 q^n. \quad (1.5)$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать:

а) по две карты;

б) по 32 карты,

из колоды, содержащей 36 игровых карт?

Решение. Искомое число способов:

$$\text{а) } C_{36}^2 = \frac{36!}{2! \cdot 34!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630;$$

$$\text{б) } C_{36}^{32} = C_{36}^4 = \frac{36!}{4! \cdot 32!} = 58\,905.$$

1.1.2. Виды случайных событий

Выше было приведено определение случайного события. Обычно в теории вероятностей вместо термина «комплекс условий» употребляют термин «испытание», и тогда событие трактуется как результат испытания. Например, стрельба по мишени: выстрел — это испытание, попадание в мишень — событие; подбрасывание монеты вверх — испытание, выпадение орла (или решки) — событие.

Определение 1. События называют *несовместными*, если в одном и том же испытании наступление одного из событий исключает наступление других.

Например, выпадение орла при подбрасывании монеты исключает появление в этом же испытании решки, и наоборот.

Определение 2. Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания наступление хотя бы одного из них является достоверным событием.

Например, при выстреле по мишени (испытание) обязательно будет либо попадание, либо промах; эти два события образуют полную группу.

Следствие. Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания наступит одно и только одно из этих событий.

Этот частный случай будет использован далее.

1.1.3. Классическое определение вероятности

Назовем каждый из возможных результатов испытания *элементарным событием*, или *исходом*. Те элементарные исходы, которые нас интересуют, называются *благоприятными* событиями.

Определение 3. Отношение числа благоприятных событию A элементарных исходов к общему числу равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, называется *вероятностью события A* .

Вероятность события A обозначается $P(A)$. Понятие вероятности — одно из основных в теории вероятностей. Данное его определение является классическим. Из него вытекают некоторые свойства.

Свойство 1.1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 1.2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 1.3. Вероятность случайного события есть положительное число

$$0 < P(A) < 1.$$

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.6)$$

Отметим, что современные курсы теории вероятностей основаны на теоретико-множественном подходе, в котором элементарные события являются точками пространства элементарных событий Ω ; событие A отождествляется с подмножеством элементарных исходов, благоприятных этому событию, $A \subset \Omega$.

Приведем примеры непосредственного вычисления вероятностей.

Пример 4. В коробке лежат 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из 5 взятых наугад шаров будет 4 белых.

Решение. Найдем число благоприятных исходов: число способов, которыми можно взять 4 белых шара из 6 имеющихся, равно $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$. Общее число исходов определяется числом сочетаний из 10 по 5: $C_{10}^5 = 252$. Согласно определению 3 искомая вероятность $P = 15/252 \approx 0,06$.

Пример 5. Какова вероятность того, что при заполнении карточки спортивной лотереи «6 из 36» будет угадано 4 номера?

Решение. Общее число исходов равно $C_{36}^6 = 1947792$. Число благоприятных исходов равно $C_6^4 = 15$. Отсюда искомая вероятность равна $7,7 \cdot 10^{-6}$.

Пример 6. В ящике находятся 10 стандартных и 5 нестандартных деталей. Какова вероятность, что среди наугад взятых 6 деталей будет 4 стандартных и 2 нестандартных?

Решение. Общее число исходов C_{15}^6 . Число благоприятных исходов определяется произведением $C_{10}^4 \cdot C_5^2$, где первый сомножитель соответствует числу вариантов изъятия из ящика 4 стандартных деталей из 10, а второй — числу вариантов изъятия из ящика 2 нестандартных деталей из 5. Отсюда следует, что искомая вероятность равна

$$P = \frac{C_{10}^4 \cdot C_5^2}{C_{15}^6} = 0,42.$$

1.2. Теорема сложения вероятностей

Рассмотрим различные типы групп событий.

1.2.1. Несовместные события

О п р е д е л е н и е 4. Суммой двух событий A и B называют событие $C = A + B$, которое заключается в наступлении либо события A , либо события B , либо событий A и B одновременно.

Это определение напоминает определение суммы множеств^{*}, что используется в теоретико-множественном подходе в теории вероятностей. Примеры суммы событий: произведены два выстрела, и события A и B — попадания при первом и втором выстрелах соответственно; тогда $A + B$ — попадание либо при первом выстреле, либо при втором, либо при обоих выстрелах. Если события A и B несовместные, то их сумма — это событие, состоящее в наступлении какого-либо одного из этих событий.

Аналогично определяется сумма нескольких событий, состоящая в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема 1.1. Вероятность появления какого-либо из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad \blacksquare \quad (1.7)$$

Следствие 1.1. Вероятность появления какого-либо из нескольких попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (1.8)$$

Пример 7. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 4 концентрические зоны. Вероятности попадания в эти зоны соответственно равны 0,4; 0,3; 0,2 и 0,1. Найти вероятность попадания либо в первую, либо во вторую зону.

Решение. Пусть событие A — попадание в первую зону мишени, а событие B — попадание во вторую зону мишени. Эти события несовместны, поэтому применимы теорема 1.1 и формула (1.7) сложения вероятностей. Искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,3 = 0,7.$$

^{*}См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005. – Гл. 6.

1.2.2. Полная группа событий

Теорема 1.2. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad \blacksquare \quad (1.9)$$

Пример 8. На складе готовой продукции находятся изделия, среди которых 5% нестандартных. Найти вероятность того, что при выдаче изделия со склада оно будет стандартным.

Решение. Вероятность получения нестандартного изделия равна 0,05; события выдачи стандартного и нестандартного изделия образуют полную группу. Следовательно, сумма их вероятностей равна единице, и тогда искомая вероятность равна 0,95.

1.2.3. Противоположные события

Определение 5. Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются *противоположными*.

Если событие обозначено через A , то противоположное ему событие обозначается через $\bar{A}$. Из теоремы 1.2 следует, что

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.10)$$

Например, если при стрельбе по мишени попадание — это событие A , то событие $\bar{A}$ — это промах; сумма их вероятностей равна единице — при выстреле обязательно будет либо попадание, либо промах. То же имеет место и при подбрасывании монеты: обязательно выпадет либо орел, либо решка.

Пример 9. В магазине имеется 10 телевизоров, из которых 2 неисправных. Найти вероятность того, что среди наугад взятых трех телевизоров будет хотя бы один неисправный.

Решение. События «среди взятых телевизоров нет ни одного неисправного» и «есть хотя бы один неисправный» — противоположные. Первое из них обозначим через A , а второе — через $\bar{A}$. Общее число способов, которыми можно взять 3 изделия из 10, равно C_{10}^3 . Число исправных телевизоров равно 8, число способов выборки из них трех изделий равно C_8^3 , так что вероятность

$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3}$. Искомая вероятность определяется из формулы (1.10):

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = 1 - 0,47 = 0,53.$$

1.3. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим различные типы групп событий.

1.3.1. Произведение событий и условная вероятность

Определение 6. Произведением двух событий A и B называется событие AB , означающее совместное появление этих событий (это определение также напоминает определение произведения множеств)*.

Например, если событие A — шар, событие B — белый цвет, то их произведение AB — белый шар. Аналогично определяется произведение нескольких событий как совместное наступление их всех.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме необходимого комплекса условий S , не налагается, то такая вероятность называется *безусловной*. Если же вводятся дополнительные условия, содержащие случайные события, то вероятность называется *условной*.

Определение 7. Вероятность события B в предположении о наступлении события A называют условной вероятностью $P_A(B)$.

Пример 10. В ящике лежат 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена стандартная деталь — событие B , если в первый раз была извлечена нестандартная деталь — событие A .

Решение. После первого извлечения в ящике из 10 деталей имеется 8 стандартных, и, следовательно, искомая вероятность

$$P_A(B) = 0,8.$$

Пусть теперь известны вероятность $P(A)$ события A и условная вероятность $P_A(B)$ события B . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. Вероятность произведения двух событий определяется формулой

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \quad \blacksquare \quad (1.11)$$

Пример 11. В условиях примера 10 найти вероятности того, что в первый раз извлечена нестандартная деталь, а во второй раз — стандартная, и наоборот.

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005. – Гл. 6.

Решение. Событие A — это извлечение из ящика нестандартной детали, а событие B — стандартной. Тогда:

1) вероятность $P(A) = 3/11$, а условная вероятность $P_A(B) = 0,8$. Искомая вероятность произведения этих событий (их совместного наступления в указанном порядке) согласно теореме 1.3 равна

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{3}{11} \cdot 0,8 \approx 0,22;$$

2) вероятность $P(B) = 8/11$, а условная вероятность $P_B(A) = 0,3$. Мы видим, что и в этом случае вероятность произведения событий $P(BA) = P(B)P_B(A) \approx 0,22$.

В этом примере мы проверили известное в теории равенство

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \quad (1.12)$$

Теорема 1.3 допускает обобщение на случай произведения любого числа событий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n), \quad (1.13)$$

т.е. вероятность совместного наступления n событий равна произведению n вероятностей, где $P_{A_1 A_2 \dots A_{k-1}}(A_k)$ — условная вероятность события A_k в предположении, что события $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-1}$ уже произошли ($k = 1, 2, \dots, n$).

Пример 12. В урне находятся 4 белых, 5 красных и 3 синих шара. Наудачу извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что в первый раз появится белый шар (событие A), во второй раз — красный (событие B), в третий — синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом извлечении $P(A) = 1/3$; условная вероятность появления красного шара во втором извлечении при условии появления в первый раз белого шара $P_A(B) = 5/11$; условная вероятность появления синего шара в третьем извлечении при условии появления в предыдущих извлечениях белого и красного шаров $P_{AB}(C) = 0,3$. Искомая вероятность определяется по формуле (1.13) при $n = 3$:

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{11} \cdot 0,3 \approx 0,045.$$

1.3.2. Независимые события

Определение 8. Событие B называется *независимым* от события A , если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности (появление события A не влияет на вероятность события B):

$$P_A(B) = P(B). \quad (1.14)$$

Отсюда следует, что и событие A независимо от события B :

$$P_B(A) = P(A). \quad (1.15)$$

Для независимых событий теорема 1.3 умножения вероятностей в общей форме, которая следует из формулы (1.13), дает следующую формулу:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n), \quad n > 1. \quad (1.16)$$

Равенство (1.16) принимается за определение независимых событий. Если события независимы, то независимы и соответствующие им противоположные события.

Пример 13. Найти вероятность поражения цели тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7 (события A , B и C).

Решение. Поскольку события A , B и C являются независимыми, искомая вероятность вычисляется по формуле (1.16) при $n = 3$:

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Когда в результате испытания могут иметь место n независимых событий с известными вероятностями их наступления, особый интерес представляет случай нахождения вероятности наступления хотя бы одного из них (например, в случае трех событий найти вероятность наступления либо одного, либо двух, либо трех событий). Обозначим это событие через A . Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4. Вероятность наступления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ определяется формулой

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n, \quad (1.17)$$

где $q_i = 1 - p_i$ — вероятности соответствующих противоположных событий $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). ■

В частном случае, когда все события A_i имеют одинаковую вероятность p , из формулы (1.17) следует, что

$$P(A) = 1 - q^n; \quad q = 1 - p. \quad (1.18)$$

Пример 14. В условиях примера 13 найти вероятность поражения цели (хотя бы одного попадания) при залповой стрельбе орудий.

Решение. Вероятности противоположных событий (промахов) соответственно равны $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,2$, $q_3 = 0,3$. Искомая вероятность находится по формуле (1.17) при $n = 3$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Из этого примера наглядно видно преимущество совместного воздействия случайных событий для достижения общего результата.

Пример 15. На перевозку груза направлены 4 автомобиля. Вероятность нахождения каждой из машин в исправном состоянии равна 0,8. Найти вероятность того, что в работе участвует хотя бы один из выделенных для этого автомобилей.

Решение. Вероятность противоположного события (машина неисправна) равна $q = 1 - 0,8 = 0,2$. По формуле (1.18) находим искомую вероятность при $n = 4$:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0,2^4 = 0,9984.$$

Пример 16. Вероятность обслуживания клиента одним операционистом в банке равна 0,6. Какое минимальное число операционистов должно работать в банке, чтобы вероятность обслуживания клиента была не менее 0,95?

Решение. Вероятность противоположного события (отказ в обслуживании клиента операционистом) равна 0,4. Пусть n — количество операционистов, удовлетворяющее условию задачи, т.е.

$$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0,4^n \geq 0,95.$$

Решая это неравенство, получаем:

$$0,4^n \leq 0,05.$$

При логарифмировании обеих частей этого неравенства следует, что

$$n \geq \frac{\lg 0,05}{\lg 0,4} = 3,27.$$

Поскольку n должно быть целым числом, окончательно получаем, что в банке должно работать не менее четырех операционистов.

1.4. Обобщения теорем сложения и умножения

1.4.1. Появление только одного из независимых событий

Рассмотрим примеры совместного применения теорем сложения и умножения. Пусть вероятности двух независимых событий A_1 и A_2 равны соответственно p_1 и p_2 . Найдем вероятность наступления только одного из указанных событий. Для этого введем новые события: B_1 и B_2 . Событие B_1 состоит в том, что событие A_1 наступило, а событие A_2 — нет; иными словами, $B_1 = A_1 \bar{A}_2$. Аналогичным образом определяется и событие $B_2 = \bar{A}_1 A_2$ (совместное ненаступление события A_1 и наступление события A_2). Поскольку события A_1 и A_2 независимы, независимы и противоположные события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$; тогда события B_1 и B_2 являются несовместными. Вероятность наступления только одного из событий A_1 и A_2 находится как сумма вероятностей несовместных событий B_1 и B_2 :

$$\begin{aligned} P(B_1 + B_2) &= P(B_1) + P(B_2) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = p_1 q_2 + p_2 q_1, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$.

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости формулы вероятности наступления только одного из трех независимых событий A_1 , A_2 , A_3 с вероятностями наступления соответственно p_1 , p_2 и p_3 :

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2, \quad (1.20)$$

где B_i — произведения наступившего события A_i и двух других ненаступивших событий ($i = 1, 2, 3$). Для случая n независимых событий формула вероятности наступления только одного из них имеет аналогичный вид: сумма n слагаемых, каждый член которой представляет собой произведение вероятности наступления одного из событий на вероятности $n - 1$ других противоположных событий.

Пример 17. Предприниматель решил вложить средства поровну в два контракта, каждый из которых принесет ему прибыль в размере 100%. Вероятность того, что любой из контрактов состоится, равна 0,8. Какова вероятность того, что в итоге предприниматель по меньшей мере ничего не потеряет?

Решение. Предприниматель по крайней мере ничего не потеряет, если либо состоится один из контрактов (прибыль по нему возместит потери по другому контракту), либо будут выполнены оба контракта. Пусть события A_1 и A_2 — выполнение соответствующих контрактов (вероятности $p = 0,8$); эти события являются независимыми. Противоположные им события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ —

невыполнение контрактов (вероятности $q = 0,2$). Тогда события $B_1 = A_1\bar{A}_2$, $B_2 = \bar{A}_1A_2$ и A_1A_2 являются несовместными (последнее событие — это выполнение обоих контрактов). Искомая вероятность определяется с учетом формул (1.16) и (1.19):

$$P(B_1 + B_2 + A_1A_2) = p_1q_2 + p_2q_1 + p_1p_2 = 2pq + p^2 = 0,96.$$

1.4.2. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Определение 9. События A и B называют *совместными*, если в одном и том же испытании наступление одного из них не исключает наступления другого.

Для таких событий справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. Вероятность суммы совместных событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad \blacksquare \quad (1.21)$$

Из формулы (1.21) следует ряд частных случаев.

1. Для независимых событий с учетом формулы (1.16):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \quad (1.22)$$

2. Для зависимых событий с учетом формулы (1.11):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B). \quad (1.23)$$

3. Для несовместных событий $P(AB) = 0$, и в этом случае имеем подтверждение теоремы 1.1 и формулы (1.7):

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 18. Вероятности поражения цели первым и вторым стрелками равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность поражения цели при залпе.

Решение. Поскольку вероятности поражения цели стрелками (события A и B соответственно) не зависят от результатов стрельбы каждого из напарников, эти события независимы. Искомая вероятность рассчитывается по формуле (1.22):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98.$$

Аналогичный результат можно было бы получить и с применением формулы (1.17). Пусть событие C — поражение цели, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — события, соответствующие промахам стрелков, тогда

$$P(C) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0,2 \cdot 0,1 = 0,98.$$

1.4.3. Формула полной вероятности

Пусть события $B_1, B_2, \dots, B_n$ несовместны и образуют полную группу, т.е. согласно теореме 1.2 выполняется равенство

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1. \quad (1.24)$$

Пусть также событие A может наступить при условии появления одного из событий B_i , причем известны как вероятности $P(B_i)$, так и условные вероятности $P_{B_i}(A)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В таком случае формула для вероятности события A определяется следующей теоремой.

Теорема 1.6. Вероятность события A , наступление которого возможно лишь при наступлении одного из несовместных событий B_i , образующих полную группу ($i = 1, 2, \dots, n$), равно сумме попарных произведений каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность появления события A :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A). \quad \blacksquare \quad (1.25)$$

Пример 19. В двух урнах находятся белые и красные шары: в первой — 4 белых и 5 красных, во второй — 7 белых и 3 красных. Из второй урны наудачу взяли шар и переложили его в первую урну. Найти вероятность того, что наудачу взятый после этого из первой урны шар будет белым.

Решение. Перекладывание из второй урны в первую белого шара (событие B_1) и перекладывание красного шара (событие B_2) образуют полную группу независимых событий. Их вероятности соответственно $P(B_1) = 0,7$ и $P(B_2) = 0,3$. Условные вероятности извлечения из первой урны белого шара (событие A) при добавлении туда белого или красного шара из второй урны соответственно равны $P_{B_1}(A) = 0,5$ и $P_{B_2}(A) = 0,4$. Искомая вероятность находится по формуле (1.25) при $n = 2$:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,47.$$

Пример 20. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 штук и из них 3 нестандартных, а во втором — 20 штук и из них 8 нестандартных. Из каждого ящика наудачу вынута по одной детали, а потом из этих двух деталей наудачу взята одна. Найти вероятность того, что эта деталь окажется стандартной.

Решение. При первой выборке двух деталей возможны четыре случая, которые образуют полную группу независимых событий:

B_{ss} — из первого и второго ящиков изъяты стандартные детали;

B_{sn} — из первого ящика изъята стандартная деталь, а из второго — нестандартная;

B_{ns} — из первого ящика изъята нестандартная деталь, а из второго — стандартная;

B_{nn} — из первого и второго ящиков изъяты нестандартные детали.

В свою очередь события B_{ik} ($i, k = s, n$) представляют собой произведения независимых событий — изъятия из каждого ящика по детали, и потому вероятности событий B_{ik} равны соответствующим произведениям вероятностей этих изъятий: $P(B_{ss}) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$; $P(B_{sn}) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$; $P(B_{ns}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$; $P(B_{nn}) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$. Условные вероятности выборки из двух деталей стандартной детали согласно перечисленным возможным случаям равны:

$$P_{B_{ss}}(A) = 1, \quad P_{B_{sn}}(A) = 0,5, \quad P_{B_{ns}}(A) = 0,5, \quad P_{B_{nn}}(A) = 0.$$

Теперь по теореме 1.6 и формуле (1.25) получаем искомую вероятность события A :

$$P(A) = P(B_{ss})P_{B_{ss}}(A) + P(B_{sn})P_{B_{sn}}(A) + P(B_{ns})P_{B_{ns}}(A) + \\ + P(B_{nn})P_{B_{nn}}(A) = 0,42 \cdot 1 + 0,28 \cdot 0,5 + 0,18 \cdot 0,5 + 0,12 \cdot 0 = 0,65.$$

1.4.4. Формулы Байеса

Пусть события $B_1, B_2, \dots, B_n$ несовместны и образуют полную группу, а событие A может наступить при условии наступления одного из них. События B_i называют *гипотезами*, так как заранее неизвестно, какое из них наступит. Пусть проведено испытание и в результате наступило событие A . Тогда условные вероятности гипотез B_i можно определить по следующим формулам:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)} = \\ = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P_{B_k}(A)} = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

Формулы (1.26) называются *формулами Байеса** по имени их автора. Они позволяют оценить вероятность гипотезы B_i во всех испытаниях, где наступает событие A . Иными словами, зная вероятность $P(B_i)$ до проведения испытания, мы можем переоценить ее после проведения испытания, в результате которого наступило событие A .

*Байес Томас (1702–1761) — английский математик.

Пример 21. Вероятность изготовления изделия с браком равна 0,08. После изготовления все изделия подвергаются проверке, в результате которой изделия без брака признаются годными с вероятностью 0,95, а изделия с браком — с вероятностью 0,06. Найти долю изделий, выпущенных после проверки, а также вероятность того, что выпущенное после проверки изделие окажется без брака.

Решение. Независимые события (гипотезы), образующие полную группу, — это B_1 (изделие без брака) и B_2 (изделие с браком). Пусть событие A заключается в том, что при проверке изделие признается годным. Ответ на первый вопрос задачи находится по формуле (1.25):

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,92 \cdot 0,95 + 0,08 \cdot 0,06 = 0,8788.$$

Следовательно, после проверки признаются годными около 88% всех изготовленных изделий.

Для ответа на второй вопрос задачи применим формулы Байеса (1.26) при $n = 2$ и $i = 1$:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,92 \cdot 0,95}{0,8788} = 0,995.$$

Иными словами, среди изделий, прошедших проверку, содержится 99,5% изделий без брака.

Пример 22. В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка 60 обслуживает первый операционист и 40 — второй операционист. Вероятности того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением самим операционистом, составляют 0,9 и 0,75 соответственно для первого и второго операционистов. Найти вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом.

Решение. Вероятность того, что клиент попадет к первому операционисту (событие B_1) составляет 0,6, ко второму — 0,4 (событие B_2). Искомая вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом (событие A) определяется по формулам (1.25) и (1.26):

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,9}{0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,75} = 0,64.$$

Иными словами, 64% клиентов, попавших на обслуживание к первому операционисту, будут обслужены только им.

1.5. Схема независимых испытаний

1.5.1. Формула Бернулли

Определение 10. Если при проведении нескольких испытаний вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других событий, то эти испытания называются *независимыми относительно события A* .

Будем рассматривать только такие независимые испытания, в которых событие A имеет одинаковую вероятность. Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью p . Тогда вероятность противоположного события — ненаступления события A — также одинакова в каждом испытании и равна $q = 1 - p$. В теории вероятностей особый интерес представляет случай, когда в n испытаниях событие A наступает k раз и не наступает $n - k$ раз.

Вероятность этого сложного события, состоящего из n испытаний, определяется по *формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{или} \quad P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \quad (1.27)$$

Пример 23. Монету бросают шесть раз. Найти вероятности того, что герб выпадет: 1) два раза; 2) не менее двух раз.

Решение. Вероятности выпадения любой из двух сторон монеты одинаковы, т.е. $p = q = 0,5$.

1) В этом случае $n = 6$, $k = 2$. Отсюда согласно формуле (1.27) получаем:

$$P_6(2) = C_6^2 0,5^2 0,5^4 = 15 \cdot 0,5^6 = 0,23;$$

2) $P_6(2 \leq k \leq 6) = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - C_6^0 0,5^6 - C_6^1 0,5^6 = 1 - 0,5^6 \times (1 + 6) = 0,89$.

Пример 24. Вероятность покупки бракованного комплекта посуды равна 0,1. Найти вероятность того, что из 7 купленных комплектов 5 будут без брака.

Решение. По условию задачи вероятность покупки комплекта без брака $p = 0,9$, $q = 0,1$. Тогда искомая вероятность находится по формуле (1.27):

$$P_7(5) = C_7^5 p^5 q^2 = C_7^5 0,9^5 \cdot 0,1^2 = 0,12.$$

*Бернулли Якоб (1654–1705) — швейцарский математик.

Пример 25. Контрольный тест состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответов, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на 2-й, 3-й и 4-й вопросы теста для неподготовленного человека (выбор ответа наудачу).

Решение. Искомые значения вероятности находятся по формуле Бернулли (1.27) с учетом того, что вероятность события A (правильный ответ) в каждом испытании (выбор ответа на вопрос теста) равна 0,25, а $q = 0,75$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} P_4(2) &= C_4^2 0,25^2 \cdot 0,75^2 = 0,21; \\ P_4(3) &= C_4^3 0,25^3 \cdot 0,75^1 = 0,047; \\ P_4(4) &= C_4^4 0,25^4 \cdot 0,75^0 = C_4^0 \cdot 0,25^4 = 0,25^4 = 0,004. \end{aligned}$$

1.5.2. Локальная теорема Лапласа

Использование формулы Бернулли (1.27) при больших значениях n и k представляется затруднительным ввиду громоздкости вычислений и операций с большими числами. В этом случае применима формула, устанавливаемая следующей теоремой.

Теорема 1.7 (локальная теорема Лапласа*). Пусть вероятность p наступления события A в каждом испытании одинакова, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит k раз в n испытаниях, приближенно равна значению функции

$$Y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \text{где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad \blacksquare \quad (1.28)$$

Точность формулы (1.28) возрастает с увеличением n . Имеются таблицы с вычисленными значениями функции $\varphi(x)$ (см. табл. 1 приложения), по которым можно с достаточно высокой степенью точности найти практически любое значение этой функции, а значит, и вычислить нужную вероятность. Поскольку функция $\varphi(x)$ четная, в таблицах даются ее значения только для положительных значений x ; иными словами, знак аргумента не играет роли. Формула (1.28) носит название *асимптотической* формулы.

Пример 26. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных изделий будет 60 изделий без брака.

*Лаплас Пьер Симон (1749–1827) — французский астроном и математик.

Решение. Вероятность наступления события A в одном испытании (выпуск изделия без брака) $p = 0,7$, тогда $q = 0,3$; в нашем случае $n = 100$, $k = 60$. Последовательно вычисляем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3} = 4,58, \quad |x| = \frac{|k - np|}{\sqrt{npq}} = \frac{10}{4,58} = 2,18.$$

Теперь для найденного аргумента x находим по табл. 1 приложения соответствующее значение $\varphi(x)$: оно равно 0,0371. Постановка этого числа в формулу (1.28) дает приближенное значение искомой вероятности:

$$P_{100}(60) = 0,0371/4,58 = 0,008.$$

1.5.3. Интегральная теорема Лапласа

Опять предположим, что в каждом из произведенных n испытаний событие A наступает с одинаковой вероятностью p . В прикладных вопросах теории вероятностей наиболее употребимы определения вероятности события A в n испытаниях, когда k изменяется в заданном интервале значений: $l < k < m$. Соответствующую вероятность обозначают $P_n(l, m)$. Формула для приближенного вычисления этой вероятности устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1.8 (интегральная теорема Лапласа). Пусть вероятность p наступления события A в каждом испытании одинакова, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что событие A наступит в n испытаниях от l до m раз, приближенно равна определенному интегралу:

$$P_n(l, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \quad (1.29)$$

где $a = \frac{l - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. ■

Формула (1.29), как и формула (1.28), применима в случае больших значений n и k . При вычислениях по формуле (1.29) пользуются специальными таблицами для интеграла

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz, \quad (1.30)$$

поскольку соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции. Функцию $\Phi(x)$ называют *интегралом вероятностей*,

соответствующая таблица ее значений приведена в приложении (табл. 2). Эта функция является нечетной, поэтому в таблицах обычно приводят значения $\Phi(x)$ для положительных значений верхнего предела интегрирования x . Более удобно использовать формулу (1.29) в виде формулы Ньютона — Лейбница:

$$P_n(l, m) = \Phi(b) - \Phi(a), \quad a = \frac{l - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \quad (1.31)$$

Пример 27. Вероятность выпуска бракованных деталей равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных деталей будет не менее 75 стандартных.

Решение. По условию задачи $p = 0,7$, $q = 0,3$, $n = 100$. Условие «не менее» означает, что число стандартных деталей k заключено в пределах от $l = 75$ до $m = 100$. Производим предварительные вычисления по формуле (1.31):

$$a = \frac{l - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5}{\sqrt{21}} = 1,09, \quad b = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = 6,55.$$

Далее по табл. 2 Приложения находим соответствующие значения интегральной функции $\Phi(x)$, подставляем их в формулу (1.31) и получаем значение искомой вероятности:

$$P_n(l, m) = \Phi(b) - \Phi(a) = 0,5 - 0,36 = 0,24.$$

Пример 28. В страховой компании 10 000 клиентов, застраховавших свою недвижимость. Страховой взнос составляет 2000 руб., вероятность несчастного случая $p = 0,005$, страховая выплата клиенту при несчастном случае — 200 000 руб. Определить размер прибыли страховой компании с вероятностью P : 1) 0,9; 2) 0,995.

Решение. Прибыль компании зависит от числа страховых выплат k при несчастных случаях. Будем полагать, что величина прибыли равна разности между суммами страховых взносов и страховых выплат:

$$R = 2000 \cdot 10\,000 - 200\,000 \cdot k \text{ руб.}$$

Теперь задача состоит в нахождении такого числа N , чтобы вероятность несчастного случая $P_{10\,000}(k > N)$ была бы не больше заданной величины $1 - P$, или, что то же самое, чтобы выполнялось условие

$$P_{10\,000}(N < k < 10\,000) \leq 1 - P.$$

Тогда с вероятностью P прибыль компании составит $(20 - 0,2N) \cdot 10^6$ руб. Предварительные вычисления значений аргумента функции $\Phi(x)$ при $n = 10000$, $l = N$ и $m = 10000$ по формулам (1.31) дают:

$$a = \frac{N - np}{\sqrt{npq}} = \frac{N - 50}{7,05}, \quad b = \frac{9550}{7,05} = 1354.$$

Из табл. 2 Приложения находим, что $\Phi(x) = 0,5$ при $|x| > 5$. Подставляя в приведенное неравенство, получаем:

$$0,5 - \Phi\left(\frac{N - 50}{7,05}\right) \leq 1 - P.$$

1. В этом случае имеем неравенство

$$0,5 - \Phi\left(\frac{N - 50}{7,05}\right) \leq 0,1 \quad \text{или} \quad \Phi\left(\frac{N - 50}{7,05}\right) \geq 0,4.$$

По табл. 2 Приложения находим, что при значении функции $\Phi = 0,4$ аргумент $x = 1,28$; поскольку функция $\Phi(x)$ является монотонно возрастающей, неравенство между значениями $\Phi(x)$ переходит в неравенство такого же смысла и для соответствующих аргументов:

$$\frac{N - 50}{7,05} \geq 1,28.$$

Отсюда получаем, что $N \geq 50 + 9,02$, или $N \geq 60$. В этом случае с вероятностью 0,9 страховой компании гарантирована прибыль

$$R = 20 - 0,2 \cdot 60 = 8 \cdot 10^6 \text{ руб.}$$

2. Проводя для этого случая аналогичные вычисления, получим, что

$$\Phi\left(\frac{N - 50}{7,05}\right) \geq 0,495.$$

Из табл. 2 Приложения находим, что при $\Phi(x) = 0,495$ аргумент $x = 2,57$, т.е.

$$\frac{N - 50}{7,05} \geq 2,57.$$

Из последнего неравенства получаем, что $N \geq 69$. В этом случае с вероятностью 0,995 компании гарантирована прибыль:

$$R = 20 - 0,2 \cdot 69 = 6,2 \cdot 10^6 \text{ руб.}$$

Из примера 28 хорошо видно, что увеличение риска страхования может привести к возрастанию прибыли компании. Это есть реализация известного в предпринимательской деятельности принципа: менее рискованные, т.е. более надежные финансовые операции, не приносят сверхприбылей.

1.5.4. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности

Определение 11. Отношение числа испытаний, в которых событие наступило, к общему числу фактически проведенных испытаний называют *относительной частотой события*

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число наступлений события A , n — общее число испытаний.

Различие между вероятностью и относительной частотой состоит в том, что первая вычисляется до опыта, а вторая — после него. Одной из важных характеристик независимых испытаний с одинаковой вероятностью наступления события A в каждом испытании ($0 < p < 1$) является отклонение относительной частоты от вероятности p . Вероятность того, что это отклонение не превышает по модулю заданного числа ε :

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon,$$

определяется формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (1.32)$$

Пример 29. Вероятность получения нестандартной детали $p = 0,1$. Найти вероятность того, что среди случайно взятых 200 деталей относительная частота появления нестандартной детали отклонится от вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. В данном случае $n = 200$, $q = 0,9$, $\varepsilon = 0,03$. По формуле (1.32) имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi(0,03 \cdot \sqrt{2222}) = 2\Phi(1,41) \approx 0,84.$$

Смысл полученного результата состоит в том, что при достаточно большом числе проб по 200 деталей в каждой в 84% случаев отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p = 0,1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Упражнения

1.1. Найти число способов извлечения из 36 игральнх карт двух тузов и двух королей.

1.2. Во взводе служат 32 солдата. Ежедневно для несения караула выделяется по два человека. Можно ли составить расписание караульной службы так, чтобы никакая пара военнослужащих этого взвода не несла караульную службу дважды?

1.3. Два букиниста обмениваются друг с другом парами книг. Найти число способов обмена, если первый букинист обменивает 6 книг, а второй — 8 книг.

1.4. Абонент забыл две промежуточные цифры номера телефона и набрал их наугад. Найти вероятность того, что номер набран правильно в случаях:

- а) забытые цифры расположены в номере рядом;
- б) забытые цифры расположены не рядом.

1.5. В урне находятся 10 шаров, 7 из которых белые. Найти вероятность того, что из 6 взятых наугад шаров будет 4 белых.

1.6. В ящике имеется 15 деталей, 10 из которых стандартные. Сборщик наугад берет 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.

1.7. В урне 40 шаров: 15 белых, 15 красных и 10 синих. Найти вероятность появления цветного шара.

1.8. Абонент забыл первую цифру телефонного номера. Найти вероятность того, что при наборе номера наудачу он наберет его верно не более чем с трех попыток.

1.9. В лотерее разыгрывается 200 вещевых и 50 денежных выигрышей на каждые 10 000 билетов. Чему равна вероятность выигрыша вообще?

1.10. В условиях упражнения 1.7: из урны извлекают один шар, не возвращая его обратно, затем извлекают второй. Найти вероятность извлечения из урны во второй раз цветного шара.

1.11. В читальном зале имеется 6 учебников, 3 из которых нового выпуска. Читатель последовательно, один за другим, взял 2 учебника. Найти вероятность того, что обе взятые книги нового выпуска.

1.12. Три автомашины направлены на перевозку груза. Вероятность исправного состояния первой из них составляет 0,7, второй — 0,8 и третьей — 0,5. Найти вероятность того, что все три автомашины находятся в эксплуатации.

1.13. В автохозяйстве имеются две автоцистерны. Вероятности технической исправности этих машин равны соответственно 0,9 и 0,8. Найти вероятность исполнения работы второй автоцистерной заказчику, сделавшему накануне заказ на автоцистерну.

1.14. Инвестор решил вложить поровну средства в три предприятия при условии возврата ему через определенный срок 150% вложенной суммы каждым предприятием. Вероятность банкротства каждого из предприятий 0,2. Найти вероятность того, что по истечении срока кредитования инвестор получит обратно по крайней мере вложенную сумму. *Указание.* См. формулу (1.20) и пример 17.

1.15. При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго — 0,45. Вероятность признания изделия без брака стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго — 0,98. При проверке изделие без брака было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

1.16. В одном из ящиков находится 7 деталей, 3 из которых нестандартные; в другом — 5 деталей, из них 2 — нестандартные. Из первого ящика наугад перекладывают деталь во второй ящик, потом из него берут деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется нестандартной.

1.17. Три стрелка выстрелили залпом по цели, и две пули поразили ее. Найти вероятность того, что первый стрелок поразил цель, если вероятности попадания в цель стрелками соответственно равны 0,4; 0,3 и 0,5.

1.18. Определить, что вероятнее для соперников равной силы при игре в шахматы: выиграть одну партию из двух или две партии из четырех.

1.19. Монету бросают пять раз. Найти вероятность выпадения одной из сторон:

- а) менее двух раз;
- б) не менее двух раз.

1.20. Вероятность выпуска стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 деталей 75 будут стандартные.

1.21. Вероятность рождения девочки равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет 50 девочек.

1.22. Вероятность наступления события равна 0,7 в каждом из 2100 независимых испытаний. Найти вероятность наступления события:

- а) не менее 1470 раз;
- б) не менее 1470 и не более 1500 раз;
- в) не более 1469 раз.

1.23. Вероятность обращения в поликлинику каждого взрослого человека в период эпидемии гриппа равна 0,8. Найти число взрослых людей, при котором можно ожидать, что в поликлинику будет не менее 75 обращений.

1.24. В банке, осуществляющем кредитование населения, 1000 клиентов. Каждому из клиентов выдается кредит 500 000 руб. при условии возврата 110% этой суммы. Вероятность невозврата кредита каждым из клиентов в среднем составляет $p = 0,01$. Какая прибыль гарантирована банку с вероятностью: а) 0,8; б) 0,995?

1.25. Вероятность наступления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность отклонения относительной частоты наступления события от его вероятности не более чем на 0,02 по абсолютной величине.

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Случайные величины и законы их распределения

2.1.1. Виды случайных величин

В главе 1 мы рассматривали события, наступление которых имеет количественную характеристику. Например, при взятии из ящика трех деталей среди них может быть до трех стандартных.

Определение 1. Величину называют *случайной*, если в результате испытания она примет лишь одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.

Каждой случайной величине соответствует множество чисел — множество значений, которые она может принимать. Например, число мальчиков среди 100 новорожденных — это случайная величина, которая может принимать значения от 0 до 100. Далее будем обозначать случайные величины строчными буквами, а их возможные значения — прописными; например, случайная величина X имеет два возможных значения x_1 и x_2 ; случайная величина Y принимает возможные значения, принадлежащие интервалу (a, b) . Различают два вида случайных величин.

Определение 2. Случайная величина, принимающая отдельные возможные значения с определенными вероятностями, называется *дискретной случайной величиной*.

Определение 3. *Непрерывной* называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Как следует из определения 2, для задания дискретной случайной величины нужно установить не только перечень ее возможных значений, но и их вероятности. Иными словами, каждому возможному значению случайной величины соответствует определенное значение вероятности появления этой величины.

2.1.2. Дискретные случайные величины

Определение 4. Соответствие между отдельными возможными значениями и их вероятностями называется *законом распределения дискретной случайной величины*.

Как и в случае функциональной зависимости, этот закон можно задать таблицей, аналитически (формулой) и графически. В случае табличного задания

закона распределения дискретной случайной величины соответствующая таблица состоит из двух строк: в первой указываются возможные значения, а во второй — их вероятности:

$$\begin{array}{cccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \quad (2.1)$$

Поскольку в одном испытании случайная величина принимает только одно возможное значение, события $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу, т.е. сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (2.2)$$

Если множество возможных значений X дискретной случайной величины бесконечно, то соответствующий ряд вероятностей сходится и его сумма равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1. \quad (2.3)$$

Пример 1. В денежной лотерее на 100 билетов разыгрывается один выигрыш в 20 руб., два выигрыша по 10 руб. и 10 выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X возможного выигрыша на один билет.

Решение. Возможные значения X :

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0.$$

Соответственно их вероятности равны:

$$p_1 = 0,01, \quad p_2 = 0,02, \quad p_3 = 0,1, \quad p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 1 - 0,13 = 0,87.$$

Таким образом, искомый закон распределения имеет вид:

$$\begin{array}{cccccc} X & 20 & 10 & 1 & 0 \\ P & 0,01 & 0,02 & 0,1 & 0,87 \end{array}$$

Пример 2. Партия из 8 изделий содержит 5 стандартных. Наудачу отбираются 3 изделия. Составить таблицу закона распределения числа стандартных изделий среди отобранных.

Решение. Случайная величина X — число стандартных деталей среди отобранных — может принимать 4 возможных значения: 0, 1, 2 и 3. Вероятность нахождения k стандартных изделий среди трех отобранных определяется формулой

$$P(X = k) = \frac{C_5^k C_3^{3-k}}{C_8^3}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Варьируя значения k от 0 до 3, получаем искомое распределение:

X	0	1	2	3
P	0,0179	0,2679	0,5357	0,1785

Пример 3. Вероятностный прогноз для величины X — процентного изменения стоимости акций по отношению к их текущему курсу в течение шести месяцев дан в виде закона распределения:

X	5	10	15	20	25	30
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Найти вероятность того, что покупка акций будет более выгодна, чем помещение денег на банковский депозит под 36% годовых.

Решение. Прирост суммы на банковском депозите при условии 3% в месяц через 6 месяцев составит $[(1,03)^6 - 1] \cdot 100\% = 19,4\%$. Вероятность того, что покупка акций выгоднее банковского депозита, определяется суммой вероятностей, соответствующих более высокому росту курса акций:

$$P(X > 19,4) = p_4 + p_5 + p_6 = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, соединив в прямоугольной системе координат XOP точки (x_i, p_i) отрезками прямых. Так, на рис. 2.1 показан закон распределения из примера 3. Такая фигура называется *многоугольником распределения*.

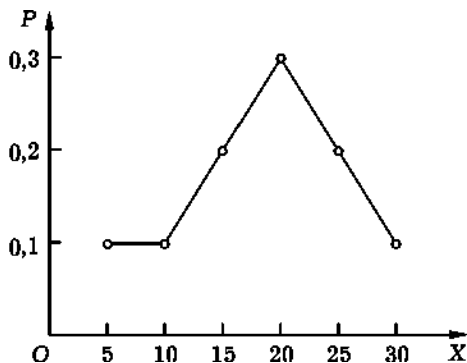


Рис. 2.1

2.1.3. Биномиальное распределение

Пусть проводится n независимых испытаний, и в каждом из них событие A может либо наступить, либо нет. Пусть также вероятность p наступления события A в каждом испытании одинакова (см. подразд. 1.5). В качестве дискретной случайной величины X рассмотрим число наступлений события A в этих n испытаниях. Очевидно, что $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = n$. Вероятности этих возможных значений k определяются по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (2.4)$$

где $q = 1 - p$ — вероятность противоположного события (ненаступление события A в одном испытании). Формула (2.4) представляет собой аналитическую форму закона распределения случайной величины (числа наступлений события A в n независимых испытаниях), которое называется *биномиальным*. Данное название обусловлено тем, что правая часть в формуле (2.4) представляет собой общий член разложения бинома Ньютона (1.5). Таким образом, в соответствии с формулой (2.4) табличная форма биномиального закона имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} X & n & n-1 & \dots & k & \dots & 0 \\ P & p^n & np^{n-1}q & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & q^n \end{array} \quad (2.5)$$

Можно показать, что сумма всех вероятностей из второй строки этой таблицы равна единице, т.е.

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = p^n + np^{n-1}q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + q^n = 1. \quad (2.6)$$

Пример 4. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

Решение. Примем за A событие невозврата кредита. Так как заемщики действуют независимо, выдачу 5 кредитов можно считать за 5 независимых событий. Вероятность невозврата k кредитов из 5 описывается биномиальным распределением (2.4), где $p = 0,2, q = 0,8, k$ принимает значения от 0 до 5. Согласно формуле (2.5) искомая таблица закона распределения составляется при $n = 5$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ P & 0,2^5 & 5 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 & 10 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 & 10 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 & 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 & 0,8^5 \end{array}$$

или окончательно:

$$\begin{array}{ccccccc} X & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ P & 0,00032 & 0,0064 & 0,0512 & 0,2048 & 0,4096 & 0,32768 \end{array}$$

2.1.4. Распределение Пуассона

Пусть в каждом из n проводимых испытаний вероятность наступления события A равна p . Как мы знаем, для определения вероятности k наступления события A используется формула Бернулли (2.4); при больших n применяют асимптотическую формулу Лапласа (1.28). Однако эта формула плохо подходит, если p мало. В случаях малых значений p и больших значений n используется *асимптотическая формула Пуассона*. Эта формула выведена при важном допущении, что произведение np является постоянной величиной, т.е. $np = \lambda$. Тогда вероятность того, что событие A наступит k раз, определяется по формуле, которая представляет собой *закон распределения Пуассона вероятностей массовых и редких событий*:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (2.7)$$

Пример 5. На базу отправлено 10 000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0,0003. Найти вероятность того, что на базу придут 4 поврежденных изделия.

Решение. По условию задачи $n = 10\,000$, $p = 0,0003$, $k = 4$. Находим λ , а затем по формуле (2.7) и искомую вероятность:

$$\lambda = np = 10\,000 \cdot 0,0003 = 3, \quad P_{10\,000}(4) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = 0,168.$$

2.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Установленный закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто используются *числовые характеристики случайной величины*, которые дают некоторое осредненное описание случайной величины, получаемое на базе закона ее распределения.

2.2.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть случайная величина X может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Определение 5. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* называется сумма произведений всех ее возможных значений на их

вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i. \quad (2.8)$$

Из этого определения следует, что математическое ожидание есть некоторая постоянная (неслучайная) величина. Вероятностный же смысл математического ожидания состоит в том, что оно приближенно равно (в особенности для большого числа испытаний) *среднему арифметическому значений случайной величины*. Это хорошо видно в случае, когда вероятности всех возможных значений дискретной случайной величины равны: $p_i = p = 1/n$; из формулы (2.8) получаем:

$$M(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (2.9)$$

Пример 6. Найти математическое ожидание количества очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение. Выпадение каждой грани кубика от одного очка до шести имеет одинаковую вероятность $p = 1/6$. Следовательно, по формуле (2.9) получаем искомое математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5.$$

Пример 7. Найти математическое ожидание невозврата кредитов, используя данные примера 4.

Решение. Воспользуемся полученной в примере 4 итоговой таблицей распределения дискретной случайной величины и формулой (2.9); имеем:

$$M(X) = 5 \cdot 0,00032 + 4 \cdot 0,0064 + 3 \cdot 0,0512 + \\ + 2 \cdot 0,2048 + 1 \cdot 0,4096 + 0 \cdot 0,32768 = 1.$$

2.2.2. Свойства математического ожидания

Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной:

$$M(C) = C. \quad (2.10)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X). \quad (2.11)$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_m) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_m). \quad (2.12)$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(X_1 X_2 \dots X_m) = M(X_1) M(X_2) \dots M(X_m). \quad (2.13)$$

Пример 8. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в некотором автосалоне составляют в среднем 100 тыс. руб., а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется закону распределения:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене на машину 150 тыс. руб.

Решение. Ежедневная прибыль подсчитывается по формуле

$$\Pi = (150X - 100) \text{ тыс. руб.}$$

Искомая характеристика $M(\Pi)$ находится с использованием приведенных свойств математического ожидания:

$$\begin{aligned} M(\Pi) &= M(150X - 100) = 150M(X) - 100 = \\ &= 150 \cdot 2,675 - 100 = 301,25 \text{ (тыс. руб.)}. \end{aligned}$$

Если в n независимых испытаниях вероятность наступления в каждом из них события A одинакова, то ответ на вопрос о среднем числе наступлений события A дает следующая теорема.

Теорема 2.1. Математическое ожидание $M(X)$ числа наступлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:

$$M(X) = np. \quad \blacksquare \quad (2.14)$$

Пример 9. Найти математическое ожидание числа выигрышных лотерейных билетов, если куплено 200 билетов, а вероятность выигрыша по одному билету равна 0,015.

Решение. Поскольку приобретение каждого билета является независимым испытанием относительно наступления события A — выпадения выигрыша, применим теорему 2.1 и формулу (2.14). В нашем случае $n = 200$, $p = 0,015$, откуда мы получаем:

$$M(200) = 200 \cdot 0,015 = 3.$$

2.2.3. Дисперсия дискретной случайной величины

Как уже говорилось, математическое ожидание является средней характеристикой случайной величины и не определяет случайную величину достаточно полно. По этой причине рассматриваются и другие числовые характеристики.

Пусть X — случайная величина, а $M(X)$ — ее математическое ожидание.

Определение 6. Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется *отклонением*.

Пусть закон распределения случайной величины X задан таблично в виде (2.1), тогда отклонение $X - M(X)$ имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{cccccc} X - M(X) & x_1 - M(X) & x_2 - M(X) & \dots & x_n - M(X) & \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \end{array} \quad (2.15)$$

Отклонение имеет важное свойство, которое устанавливается непосредственно из свойств математического ожидания:

$$M[X - M(X)] = 0, \quad (2.16)$$

т.е. *математическое ожидание отклонения равно нулю*.

Пример 10. Используя данные примера 8, найти закон распределения отклонения числа проданных за день автомашин.

Решение. Как было подсчитано в примере 8, $M(X) = 2,675$. Тогда согласно (2.15) искомый закон определяется следующим образом:

$X - M(X)$	-2,675	-1,675	-0,675	0,325	1,325
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1

Продолжение

$X - M(X)$	2,325	3,325	4,325	5,325	6,325
P	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

На практике важной характеристикой является рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Среднее значение

отклонения согласно формуле (2.16) равно нулю, так как суммируются отрицательные и положительные отклонения, поэтому целесообразно ввести в рассмотрение абсолютные значения отклонений, или их квадраты.

О п р е д е л е н и е 7. Математическое ожидание квадрата отклонения называется *дисперсией*, или *рассеянием*:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (2.17)$$

Пусть случайная величина задана законом распределения (2.1), тогда квадрат отклонения этой случайной величины имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccccc} [X - M(X)]^2 & [x_1 - M(X)]^2 & [x_2 - M(X)]^2 & \dots & [x_n - M(X)]^2 \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \quad (2.18)$$

Отсюда согласно формуле (2.17) получаем формулу дисперсии в развернутом виде:

$$D(X) = p_1 [x_1 - M(X)]^2 + p_2 [x_2 - M(X)]^2 + \dots + p_n [x_n - M(X)]^2. \quad (2.19)$$

При вычислении дисперсии часто бывает удобно воспользоваться формулой, которая непосредственно выводится из формулы (2.17):

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (2.20)$$

П р и м е р 11. Используя данные примера 8, найти дисперсию ежедневной продажи числа автомашин.

Р е ш е н и е. Закон распределения случайной величины X^2 имеет вид:

X^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Математическое ожидание $M(X^2)$ рассчитывается из этой таблицы:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,1 + \\ &+ 36 \cdot 0,05 + 49 \cdot 0,05 + 64 \cdot 0,025 + 81 \cdot 0,025 = 13,475. \end{aligned}$$

Математическое ожидание $M(X) = 2,675$. Следовательно, по формуле (2.20) получаем искомую величину дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,475 - 7,156 = 6,319.$$

2.2.4. Свойства дисперсии

Приведем основные свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0. \quad (2.21)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X). \quad (2.22)$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n). \quad (2.23)$$

Данные свойства дисперсии используются в вычислениях с несколькими случайными величинами. Из свойств 1 и 3 следует важный вывод: $D(X + C) = D(X)$, где C постоянная величина. Кроме того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Дисперсия числа наступлений события A в n независимых испытаниях (с вероятностью p наступления в каждом из них этого события) вычисляется по формуле

$$D(X) = np(1 - p) = npq. \quad \blacksquare \quad (2.24)$$

Приведем еще два важных результата: математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона (2.7), равны параметру λ данного распределения.

Пример 12. Найти дисперсию числа выигрышных лотерейных билетов, используя данные примера 9.

Решение. Имеем 200 независимых испытаний с вероятностью появления выигрышного билета $p = 0,015$. Стало быть, $q = 1 - 0,015 = 0,985$, откуда и получаем искомую дисперсию:

$$D(X) = npq = 200 \cdot 0,015 \cdot 0,985 = 2,955.$$

Пример 13. Банк выдал ссуды n разным заемщикам в размере S руб. каждому под ставку ссудного процента r . Найти математическое ожидание и дисперсию прибыли банка, а также условие на ставку ссудного процента, если вероятность возврата ссуды заемщиком равна p .

Решение. Поскольку заемщики между собой не связаны, можно полагать, что мы имеем n независимых испытаний. Вероятность утери ссуды для банка в каждом испытании равна $q = 1 - p$. Пусть X — число заемщиков, возвративших ссуду с ссудным процентом, тогда прибыль банка определяется формулой

$$\Pi = \left(1 + \frac{r}{100}\right)SX - nS,$$

где X — случайная величина с биномиальным законом распределения. Тогда согласно теореме 2.1 математическое ожидание прибыли определяется с использованием формулы (2.14):

$$M(\Pi) = \left(1 + \frac{r}{100}\right)SM(X) - nS = \left(1 + \frac{r}{100}\right)Sn p - nS = Sn \left(\frac{rp}{100} - q\right).$$

Выдача ссуды имеет смысл лишь при положительном математическом ожидании прибыли (положительная средняя величина прибыли). Из условия $M(\Pi) > 0$ вытекает условие на ставку ссудного процента:

$$r > 100 \frac{q}{p} \quad \text{или} \quad r > 100 \frac{1-p}{p}.$$

Дисперсия прибыли банка согласно теореме 2.2 находится с использованием формулы (2.24) и свойств дисперсии 1–3:

$$D(\Pi) = D\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)SX - nS\right] = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 S^2 npq.$$

2.2.5. Среднее квадратическое отклонение

Одной из основных оценок рассеяния возможных значений случайной величины служит среднее квадратическое отклонение.

Определение 8. Средним квадратическим отклонением случайной величины X (стандартом) называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (2.25)$$

Из этого определения свойства дисперсии 3 и формулы (2.23) следует, что в случае суммы взаимно независимых случайных величин справедлива формула

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}. \quad (2.26)$$

Пример 14. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной распределением:

X	−5	2	3	4	6
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Решение. Имеем: $M(X) = 2,6$. Составим таблицу распределения случайной величины X^2 :

X^2	25	4	9	16	36
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Отсюда получаем, что $M(X^2) = 14,4$. По формулам (2.20) и (2.25) окончательно получаем искомые значения $D(X)$ и $\sigma(X)$:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 7,64;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2,76.$$

Пример 15. Законы распределения независимых случайных величин X и Y приведены соответственно в таблицах:

X	-2	0	1	3	4	Y	2	4	6	8
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	P	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

Решение. Согласно свойствам дисперсии 2 и 3 (формулы (2.22) и (2.23)) имеем:

$$D(Z) = D(2X + 3Y) = 4D(X) + 9D(Y).$$

Для вычисления дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$ составляем соответствующие таблицы — законы распределения случайных величин X^2 и Y^2 :

X^2	4	0	1	9	16	Y^2	4	16	36	64
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	P	0,2	0,4	0,3	0,1

Отсюда получаем:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 5 - 1,4^2 = 3,04;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 24,4 - 4,6^2 = 3,24.$$

Искомые дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины Z равны:

$$D(Z) = D(2X + 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 \cdot 3,04 + 9 \cdot 3,24 = 41,32;$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = 6,43.$$

Пример 16. В условиях примера 13 найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение прибыли при $n = 1000$, $p = 0,8$, $S = 100$ тыс. руб. и $r = 30\%$.

Решение. Ставка ссудного процента удовлетворяет условию, чтобы математическое ожидание прибыли было положительным: $30 > 100(1 - 0,8)/0,8$. Математическое ожидание прибыли

$$M(\Pi) = Sn\left(\frac{rp}{100} - q\right) = 100 \cdot 1000 \cdot \left(\frac{30 \cdot 0,8}{100} - 0,2\right) = 4000 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Среднее квадратическое отклонение прибыли

$$\begin{aligned}\sigma(\Pi) &= \sqrt{D(\Pi)} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) S \sqrt{npq} = \\ &= 1,3 \cdot 100 \cdot \sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 1644,38 \text{ (тыс. руб.)}.\end{aligned}$$

2.2.6. Начальные и центральные моменты

Определение 9. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k :

$$\nu_k = M(X^k). \quad (2.27)$$

В частности,

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2),$$

и тогда формула (2.20) для вычисления дисперсии принимает вид

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2. \quad (2.28)$$

Определение 10. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени отклонения:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k]. \quad (2.29)$$

В частности, согласно формуле (2.16) $\mu_1 = 0$, а дисперсия случайной величины X является центральным моментом второго порядка:

$$D(X) = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2. \quad (2.30)$$

Соотношения, связывающие начальные и центральные моменты, тоже могут быть легко получены. Приведем такие соотношения для моментов третьего и четвертого порядков (они наряду с моментами первого и второго порядков широко применяются в статистике):

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3; \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \quad (2.31)$$

Моменты более высоких порядков используются крайне редко.

Рассмотренные моменты называют *теоретическими*. В отличие от них моменты, вычисляемые по данным наблюдений в математической статистике, называют *эмпирическими*.

2.3. Система двух случайных величин

2.3.1. Двумерная случайная величина

До сих пор мы рассматривали дискретные случайные величины, которые называют одномерными: их возможные значения определялись одним числом. Кроме одномерных величин изучают величины, возможные значения которых определяются несколькими числами. Двумерную случайную величину обозначают через (X, Y) ; каждая из величин X и Y называется компонентой (составляющей). Величины X и Y , анализируемые одновременно, образуют систему двух случайных величин. Например, при штамповке стальных пластинок их длина и ширина представляют собой двумерную случайную величину.

Определение 11. *Законом распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют множество возможных пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$. Двумерную случайную величину можно трактовать как случайную точку $A(X, Y)$ на координатной плоскости.*

Закон распределения двумерной случайной величины обычно задается в виде таблицы, в первой строке которой указаны возможные значения x_i случайной величины X , в первом столбце — возможные значения y_j случайной величины Y , на пересечениях остальных строк и столбцов — соответствующие вероятности p_{ij} .

Пусть случайная величина X может принимать n значений, а случайная величина Y — m значений. Тогда закон распределения двумерной случайной

величины (X, Y) имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y/X & \rightarrow & x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\
 \downarrow & & & & & & & \\
 y_1 & & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1n} \\
 y_2 & & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2i} & \dots & p_{2n} \\
 \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 y_j & & p_{j1} & p_{j2} & \dots & p_{ji} & \dots & p_{jn} \\
 \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 y_m & & p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mi} & \dots & p_{mn}
 \end{array} \quad (2.32)$$

Из этой таблицы можно найти законы распределения каждой из случайных компонент. Например, вероятность того, что случайная величина X примет значение x_k , согласно теореме сложения вероятностей независимых событий равна:

$$P(x_k) = p_{k1} + p_{k2} + \dots + p_{km}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.33)$$

Иными словами, для нахождения вероятности $P(x_k)$ нужно просуммировать все m вероятностей по k -му столбцу таблицы (2.32). Аналогично определяется вероятность того, что случайная величина Y примет возможное значение y_r : $P(y_r)$ получается суммированием всех n вероятностей r -й строки таблицы (2.32) ($r = 1, 2, \dots, m$). Отсюда следует, что сумма всех вероятностей в законе распределения (2.32) равна единице:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1. \quad (2.34)$$

Пример 17. Задано распределение двумерной случайной величины:

$$\begin{array}{cccc}
 Y/X & \rightarrow & 1 & 2 & 3 \\
 \downarrow & & & & \\
 1 & & 0,1 & 0,15 & 0,12 \\
 2 & & 0,2 & 0,22 & 0,21
 \end{array}$$

Найти распределения X , Y и $X + Y$.

Решение. В данном случае возможные значения случайной величины X : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Тогда согласно формуле (2.33) имеем:

$$P(x_1) = 0,1 + 0,2 = 0,3; \quad P(x_2) = 0,15 + 0,22 = 0,37;$$

$$P(x_3) = 0,12 + 0,21 = 0,33.$$

Отсюда получаем закон распределения X :

$$\begin{array}{cccc}
 X & 1 & 2 & 3 \\
 P & 0,3 & 0,37 & 0,33
 \end{array}$$

Аналогично получаем вероятности для распределения Y :

$$\begin{aligned} y_1 = 1, \quad P(y_1) &= 0,1 + 0,15 + 0,12 = 0,37; \\ y_2 = 2, \quad P(y_2) &= 0,2 + 0,22 + 0,21 = 0,63 \end{aligned}$$

и закон распределения:

$$\begin{array}{cc} Y & 1 & 2 \\ P & 0,37 & 0,63 \end{array}$$

Теперь найдем распределение $X + Y$. Возможные значения этой случайной величины: 2, 3, 4 и 5. Соответствующие вероятности равны:

$$\begin{aligned} P(2) &= 0,1; & P(3) &= 0,15 + 0,2 = 0,35; \\ P(4) &= 0,12 + 0,22 = 0,34; & P(5) &= 0,21. \end{aligned}$$

Отсюда находим искомое распределение:

$$\begin{array}{ccccc} X + Y & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P & 0,1 & 0,35 & 0,34 & 0,21 \end{array}$$

Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий используются и другие числовые характеристики, определяющие взаимосвязь этих величин.

2.3.2. Корреляционный момент

Определение 12. *Корреляционным моментом (или ковариацией) случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения их отклонений:*

$$\mu_{xy} = \text{Cov}(X, Y) = M[X - M(X)][Y - M(Y)]. \quad (2.35)$$

Корреляционный момент нужен для описания связи между случайными величинами X и Y . Из свойств математического ожидания легко убедиться в том, что μ_{xy} можно записать в следующем виде:

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y). \quad (2.36)$$

Для непосредственного вычисления корреляционного момента (ковариации) используется формула (см. распределение (2.32))

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y). \quad (2.37)$$

Теорема 2.3. Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю. ■

Если корреляционный момент μ_{xy} не равен нулю, то, стало быть, величины X и Y являются зависимыми.

2.3.3. Коэффициент корреляции

Из определения корреляционного момента следует, что его размерность равна произведению размерностей величин X и Y ; например, если X и Y выражены в сантиметрах, то μ_{xy} имеет размерность см^2 . Это обстоятельство затрудняет сравнение корреляционных моментов разных систем случайных величин. Для устранения этого недостатка вводят безразмерную числовую характеристику — *коэффициент корреляции*, величина которого не зависит от выбора системы измерения случайных величин.

Определение 13. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется отношение их корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}. \quad (2.38)$$

Из определений и свойств математического ожидания и дисперсии следует важный вывод, что абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит единицы:

$$|r_{xy}| \leq 1 \quad \text{или} \quad -1 \leq r_{xy} \leq 1. \quad (2.39)$$

Определение 14. Две случайные величины X и Y называются *коррелированными*, если их корреляционный момент (коэффициент корреляции) отличен от нуля; если же их корреляционный момент равен нулю, то X и Y называются *некоррелированными*.

Таким образом, две коррелированные (т.е. при $r_{xy} \neq 0$) случайные величины являются также зависимыми. Обратное утверждение неверно, т.е. две зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Пример 18. Найти корреляционный момент и коэффициент корреляции двух случайных величин X и Y , распределения которых заданы в примере 17.

Решение. Воспользуемся формулами (2.37), (2.38), а также формулой вычисления центрального момента второго порядка (2.30); последовательно вычисляем:

$$M(X) = 2,03; \quad M(Y) = 1,63; \quad D(X) = 0,629; \quad D(Y) = 0,233;$$

$$\begin{aligned} \mu_{xy} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y) &= 1 \cdot 1 \cdot 0,1 + 1 \cdot 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,15 + \\ &+ 2 \cdot 2 \cdot 0,22 + 3 \cdot 1 \cdot 0,12 + 3 \cdot 2 \cdot 0,21 - 2,03 \cdot 1,63 = -0,0089; \end{aligned}$$

$$r_{xy} = \frac{-0,0089}{\sqrt{0,629 \cdot 0,233}} = -0,023.$$

В данном случае коэффициент корреляции близок к нулю; это означает, что случайные величины X и Y *слабо коррелированы*.

2.3.4. Линейная регрессия

Пусть (X, Y) — двумерная случайная величина, где X и Y — зависимые случайные величины. Возможно приближенное представление величины Y в виде линейной функции величины X :

$$Y \approx g(x) = aX + b, \quad (2.40)$$

где a и b — параметры, подлежащие определению. Обычно эти величины определяются с помощью метода наименьших квадратов*.

Определение 15. Функция (2.40) называется *наилучшим приближением* в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Функцию $g(x)$ называют *средней квадратической регрессией* Y на X .

Теорема 2.4. Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид:

$$g(X) = m_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x), \quad (2.41)$$

где r_{xy} определяется формулой (2.38), а $m_y = M(Y)$ и $m_x = M(X)$ — математические ожидания соответственно случайных величин Y и X . ■

Коэффициент $b = r_{xy} \sigma_y / \sigma_x$ называют *коэффициентом регрессии* Y на X , а прямую, реализующую линейную зависимость (2.41) случайной величины Y от случайной величины X

$$y - m_y = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x), \quad (2.42)$$

— *прямой средней квадратической регрессии* Y на X . Зависимость (2.41) является приближенной, и погрешность этого приближения называется *остаточной дисперсией*:

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2 (1 - r_{xy}^2). \quad (2.43)$$

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – Подразд.15.4.3.

Аналогичную форму записи имеет прямая среднеквадратическая регрессия X на Y :

$$x - m_x = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y). \quad (2.44)$$

Пример 19. Найти линейную среднюю квадратическую регрессию и остаточную дисперсию случайной величины Y на случайную величину X , используя данные примеров 17 и 18.

Решение. Для двумерной случайной величины (X, Y) , приведенной в примере 17, все необходимые числовые характеристики рассчитаны в примере 18:

$$m_x = 2,03; \quad m_y = 1,63; \quad r_{xy} = -0,023;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 0,793; \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 0,483.$$

Из уравнения (2.41) получаем искомое соотношение:

$$g(X) = 1,63 - 0,014(X - 2,03).$$

Остаточная дисперсия рассчитывается по формуле (2.43):

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2) = 0,483^2(1 - 0,023^2) = 0,233.$$

Для оценки средней квадратической погрешности линейной регрессии обычно используют величину ε . В нашем случае $\varepsilon = 0,483$.

2.4. Непрерывные случайные величины

2.4.1. Функция распределения и ее свойства

Пусть X — непрерывная случайная величина (см. определение 3), значения которой полностью заполняют интервал (a, b) . Теперь уже нельзя составить перечень всех возможных значений X , как это было сделано в случае дискретной случайной величины. Тем не менее существует способ задания любых видов случайных величин. Пусть X — действительное число. Обозначим вероятность того, что X примет значение, меньшее x , через $F(x)$.

Определение 16. *Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что X примет значение, меньшее x :*

$$F(x) = P(X < x). \quad (2.45)$$

Геометрический смысл приведенного определения: $F(x)$ — это вероятность того, что случайная величина X примет значение, изображаемое точкой на числовой оси левее точки x . По виду функции $F(x)$ определяется вид случайной величины. Уточним понятие непрерывной случайной величины.

Определение 17. Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения есть либо непрерывная кусочно-дифференцируемая функция, либо функция с непрерывной производной.

Функция распределения обладает следующими фундаментальными свойствами.

1. Область значений функции распределения лежит на отрезке $[0, 1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (2.46)$$

2. Функция распределения является неубывающей, т.е.

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1. \quad (2.47)$$

3. Если возможные значения случайной величины находятся на интервале (a, b) , то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Из приведенных свойств вытекают важные следствия.

1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X принимает значения, заключенные внутри интервала (α, β) , равна разности значений функции распределения на концах этого интервала:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (2.48)$$

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

3. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей числовой оси, то существуют следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1. \quad (2.49)$$

График типичной функции распределения непрерывной случайной величины показан на рис. 2.2.

Пример 20. Найти функцию распределения процентного изменения стоимости акций по данным примера 3 (см. подразд. 2.1.2) и построить ее график.

Решение. Перепишем таблицу распределения дискретной случайной величины в порядке возрастания ее возможных значений:

X	0	5	10	15	20	25	30
P	0	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

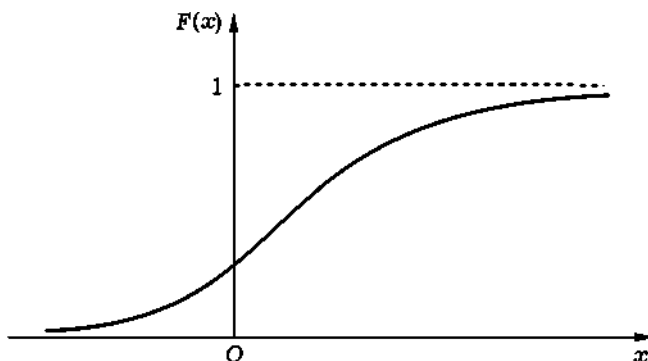


Рис. 2.2

Если $x \leq 5$, то $F(x) = 0$. Если $5 < x \leq 10$, то $F(x) = 0,1$. На интервале $10 < x \leq 15$ применяем теорему сложения вероятностей, так как события $X < 10$ и $10 < X \leq 15$ несовместны: $F(x) = 0,1 + 0,1 = 0,2$. Аналогично определяются значения $F(x)$ на других интервалах: при $15 < x \leq 20$ $F(x) = 0,4$; при $20 < x \leq 25$ $F(x) = 0,7$; при $25 < x \leq 30$ $F(x) = 0,9$; при $x > 30$ имеем достоверное событие $X < x$ (все случаи изменения стоимости акций исчерпаны), т.е. $F(x) = 1$. Таким образом, искомая функция распределения имеет следующую аналитическую форму записи:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5; \\ 0,1, & 5 < x \leq 10; \\ 0,2, & 10 < x \leq 15; \\ 0,4, & 15 < x \leq 20; \\ 0,7, & 20 < x \leq 25; \\ 0,9, & 25 < x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

График этой функции распределения показан на рис. 2.3.

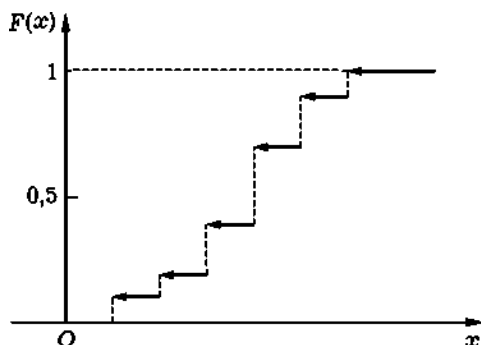


Рис. 2.3

2.4.2. Плотность распределения вероятностей и ее свойства

Определение 18. Производная от функции распределения непрерывной случайной величины X называется *плотностью распределения вероятностей* X :

$$f(x) = F'(x). \quad (2.50)$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения или неопределенным интегралом от нее. Плотность распределения — это «скорость» изменения вероятности $P(X < x)$. Из свойства 2 функции распределения вытекает справедливость следующей фундаментальной теоремы.

Теорема 2.5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение на интервале (α, β) , определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad \blacksquare \quad (2.51)$$

Вспоминая геометрический смысл определенного интеграла*, можно сказать, что вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) , равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$, снизу — осью Ox , а с краев — вертикальными прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$ (рис. 2.4).

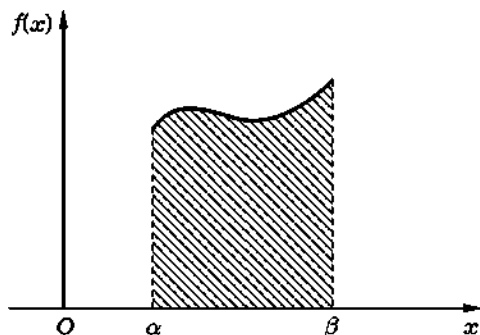


Рис. 2.4

Связь между функцией распределения и плотностью распределения вероятностей согласно равенству (2.50) устанавливается формулой

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz. \quad (2.52)$$

* См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – Подразд. 1.2.7.

Пример 21. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения X .

Решение. Функция $F(x)$ является кусочно-дифференцируемой. Согласно формуле (2.50), дифференцируя функцию $F(x)$ по интервалам ее задания, получаем:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Пример 22. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения на всей числовой оси:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Найти вероятность того, что X примет значение на интервале $(-1, 1)$.

Решение. Согласно формуле (2.51) искомая вероятность равна:

$$P(-1 < X < 1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \arctg x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

Плотность распределения обладает рядом свойств; приведем основные из них.

1. Плотность распределения является неотрицательной функцией:

$$f(x) \geq 0.$$

Это следует из характера функции распределения: она является неубывающей, и, значит, ее производная неотрицательна.

2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах интегрирования по всей числовой оси равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (2.53)$$

Это равенство означает достоверность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty, \infty)$, т.е. вероятность этого события $P(-\infty < X < \infty) = 1$. Так, если все возможные значения случайной величины X лежат внутри интервала (a, b) , то

$$\int_a^b f(x) dx = 1. \quad (2.54)$$

2.4.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определения числовых характеристик дискретных случайных величин распространяются и на непрерывные величины. Разница состоит в том, что в формулах (2.8) и (2.17) вместо сумм берутся их интегральные аналоги.

Определение 19. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения которой находятся на отрезке $[a, b]$, называется определенный интеграл*

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx. \quad (2.55)$$

Если возможные значения случайной величины X заполняют всю ось Ox , то пределы интегрирования a и b бесконечны: $a = -\infty$, $b = \infty$. Возможны также случаи, когда один из пределов интегрирования бесконечен (возможные значения X лежат на полупрямой).

Определение 20. *Дисперсией непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:*

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx. \quad (2.56)$$

Все сказанное о случаях бесконечных пределов интегрирования остается справедливым и для дисперсии.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины, как и прежде, определяется по формуле (2.25):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Для вычисления дисперсии используется более удобная формула, которая выводится из (2.56):

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2. \quad (2.57)$$

Пример 23. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной плотностью распределения на отрезке $[0, 1]$:

$$f(x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Решение. По формулам (2.55), (2.57) и (2.25) последовательно вычисляем искомые величины:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \\ D(X) &= \int_0^1 x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}; \\ \sigma(X) &= \sqrt{D(X)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,289. \end{aligned}$$

Пример 24. Найти основные числовые характеристики непрерывной случайной величины X , заданной функцией распределения на положительной полуоси Ox :

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Решение. Найдем сначала плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = e^{-x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Затем вычисляем соответствующие интегралы, применяя правило интегрирования по частям для определенного интеграла. В итоге получаем искомые величины:

$$M(X) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = - \int_0^{\infty} x d e^{-x} = -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1;$$

$$\begin{aligned}
 D(X) &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx - [M(X)]^2 = - \int_0^{\infty} x^2 d e^{-x} - 1 = \\
 &= -x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx - 1 = 2 - 1 = 1;
 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1.$$

2.4.4. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных случайных величин

Приведем весьма важные числовые характеристики, широко используемые в различных приложениях. Пусть есть n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Среднее арифметическое этих величин $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$. Пусть дисперсия каждой из случайных величин равна D . Тогда, используя формулы (2.22) и (2.23), получаем:

$$D(\bar{X}) = D \left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right] = n \frac{D}{n^2} = \frac{D}{n}. \quad (2.58)$$

Соответственно среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.59)$$

Иными словами, дисперсия среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин меньше дисперсии каждой величины в n раз, а среднее квадратическое отклонение — в $\sqrt{n}$ раз.

2.5. Основные распределения непрерывных случайных величин

2.5.1. Равномерное распределение

Определение 21. Распределение вероятностей называется *равномерным*, если на интервале возможных значений случайной величины плотность распределения постоянна.

Пусть на интервале (a, b) плотность распределения является постоянной величиной: $f(x) = C$. Определим значение C из условия (2.54):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b C dx = C(b-a) = 1,$$

откуда получаем, что $f(x) = C = 1/(b-a)$. Значит, искомая плотность равномерного распределения задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (2.60)$$

График плотности равномерного распределения приведен на рис. 2.5.

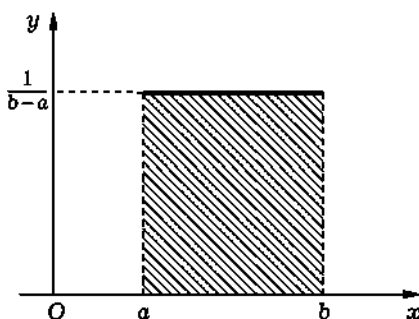


Рис. 2.5

Пример 25. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X , распределенной равномерно на интервале $(1, 5)$.

Решение. Согласно формуле (2.60) плотность распределения указанной случайной величины ненулевая и равна 0,25 на интервале $(1, 5)$. По формулам (2.55) и (2.57) последовательно вычисляем:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_1^5 x \cdot 0,25 dx = 0,125 x^2 \Big|_1^5 = 0,125(25 - 1) = 3;$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_1^5 x^2 \cdot 0,25 dx - 3^2 = 0,25 \frac{x^3}{3} \Big|_1^5 - 9 = 1,33;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,33} = 1,15.$$

Пример 26. Радиус круга измерен приближенно на интервале (a, b) . Полагая, что радиус является случайной величиной X , распределенной равномерно на этом интервале, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Решение. Площадь круга также является случайной величиной, вычисляемой по формуле $Y = \pi X^2$ и имеет то же равномерное распределение, что и случайная величина X . По формулам (2.55) и (2.57) получаем:

$$M(Y) = \int_a^b y f(x) dx = \frac{\pi}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{\pi}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{\pi}{3} (a^2 + ab + b^2);$$

$$D(Y) = \int_a^b y^2 f(x) dx - [M(Y)]^2 = \frac{\pi^2}{b-a} \int_a^b x^4 dx - \frac{\pi^2}{9} (a^2 + ab + b^2)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{b-a} \frac{b^5 - a^5}{5} - \frac{\pi^2}{9} (a^2 + ab + b^2)^2 = \frac{\pi^2}{45} (b-a)^2 (4b^2 + 7ab + 4a^2).$$

2.5.2. Нормальное распределение

Определение 22. Общим нормальным распределением вероятностей непрерывной случайной величины X называется распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.61)$$

Нормальное распределение задается двумя параметрами: a и σ . По определениям математического ожидания и дисперсии (формулы (2.55) и (2.57)) после выполнения соответствующих интегрирований можно вывести, что для нормального распределения справедливы формулы:

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma. \quad (2.62)$$

Определение 23. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *нормированным*; его плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (2.63)$$

Укажем функцию нормального распределения как первообразную плотности распределения вероятностей. Для случая нормированного нормального

распределения (2.63) эта функция согласно формуле (2.52) имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz. \quad (2.64)$$

Поскольку функция (2.63) является четной, неопределенный интеграл от нее — нечетная функция, и потому вместо функции распределения (2.64) используется функция Лапласа (см. подразд. 1.5).

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz. \quad (2.65)$$

Функции (2.63) и (2.65) табулированы (см. приложение).

Графики плотности нормального распределения (2.61) для разных значений σ показаны на рис. 2.6.

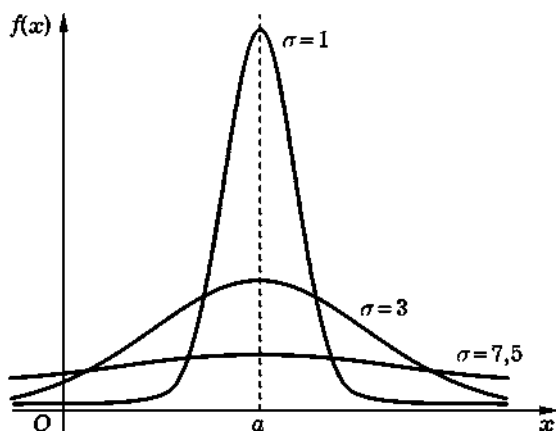


Рис. 2.6

Определение 24. Модой $M_0(X)$ называется возможное значение случайной величины X , при котором плотность распределения имеет максимум.

Определение 25. Медианой $M_e(X)$ называется такое возможное значение случайной величины X , что вертикальная прямая $x = M_e(X)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности распределения.

Нетрудно видеть, что график плотности нормального распределения симметричен относительно прямой $x = a$, поэтому и мода, и медиана в данном случае совпадают с математическим ожиданием:

$$M_0(X) = M_e(X) = M(X) = a.$$

Пусть случайная величина X задана плотностью нормального распределения (2.61); тогда вероятность того, что X примет значение на интервале (α, β) , согласно формулам (2.48) и (2.51) равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Преобразование этой формулы путем введения новой переменной интегрирования $z = (x - a)/\sigma$ приводит к удобной вычислительной формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \quad (2.66)$$

где Φ — функция Лапласа, определенная по формуле (2.65).

Пример 27. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 10 и 5. Найти вероятность того, что X примет значение на интервале $(20, 30)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.66). По условию $a = 10$, $\sigma = 5$, $\alpha = 20$ и $\beta = 30$. Следовательно,

$$P(20 < X < 30) = \Phi\left(\frac{30 - 10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 10}{5}\right) = \Phi(4) - \Phi(2).$$

По табл. 2 приложения находим соответствующие значения функции Лапласа и окончательно получаем:

$$P(20 < X < 30) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228.$$

Пример 28. Магазин продает мужские костюмы. По данным статистики, распределение по размерам является нормальным с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равным 48 и 2. Определить процент спроса на костюмы 50-го размера при условии разброса значений этого размера в интервале $(49, 51)$.

Решение. По условию задачи $a = 48$, $\sigma = 2$, $\alpha = 49$, $\beta = 51$. Используя формулу (2.66), получаем, что вероятность спроса на костюмы 50-го размера в заданном интервале равна:

$$\begin{aligned} P(49 < X < 50) &= \Phi\left(\frac{51 - 48}{2}\right) - \Phi\left(\frac{49 - 48}{2}\right) = \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(0,5) = 0,4332 - 0,1915 = 0,2417. \end{aligned}$$

Следовательно, спрос на костюмы 50-го размера составит около 24%, и магазину нужно предусмотреть это в общем объеме закупки.

2.5.3. Распределение χ^2 Пирсона

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — нормально распределенные независимые случайные величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$. Тогда сумма их квадратов

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad (2.67)$$

называется χ^2 -распределением с n степенями свободы. Доказано, что плотность этого распределения определяется формулой

$$f(x) = \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}, \quad x \geq 0, \quad (2.68)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция.

Распределение χ^2 определяется только одним параметром — числом степеней свободы n . Графики функции (2.68) для разных n показаны на рис. 2.7.

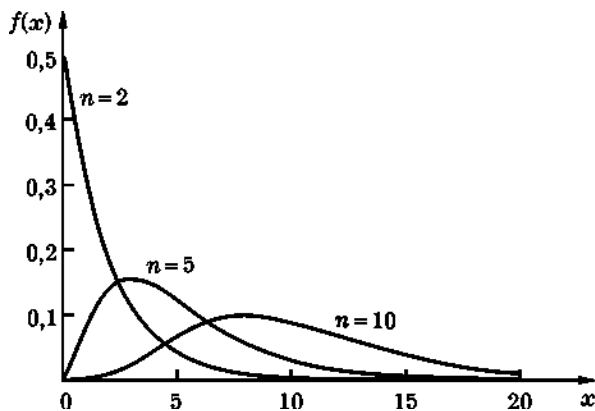


Рис. 2.7

2.5.4. Распределение Стьюдента

Пусть Z — нормальная случайная величина с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, а V — независимая от Z величина, распределенная по закону χ^2 с n степенями свободы. Тогда распределение случайной величины

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}} \quad (2.69)$$

называется распределением Стьюдента* с n степенями свободы. Плотность этого распределения определяется по формуле

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad x \geq 0. \quad (2.70)$$

С возрастанием n распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному (рис. 2.8). Интеграл вероятности этого распределения также затабулирован.

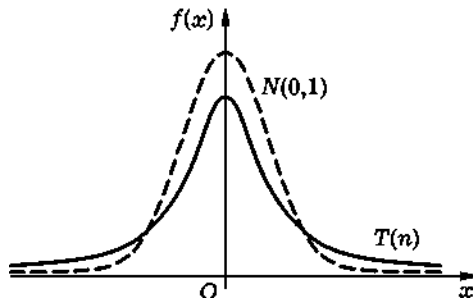


Рис. 2.8

2.5.5. Распределение Фишера

Пусть U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы m и n соответственно. Тогда случайную величину, распределенную по закону

$$F = \frac{U/m}{V/n} \quad (2.71)$$

называют распределением Фишера со степенями свободы m и n . Плотность этого распределения рассчитывается по формуле

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{m/2-1} (mx+1)^{-(m+n)/2}, \quad x \geq 0. \quad (2.72)$$

2.5.6. Асимметрия и эксцесс

В прикладных задачах, например в математической статистике, при теоретическом изучении *эмпирических* распределений, отличающихся от нормального

* Стьюдент — псевдоним английского статистика В. Госсета (1876–1936).

распределения, возникает необходимость количественных оценок таких различий. Для этой цели введены специальные безразмерные характеристики.

Определение 26. *Асимметрией* теоретического распределения называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (2.73)$$

Определение 27. *Экссессом* теоретического распределения называется величина, определяемая равенством

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad (2.74)$$

где μ_4 — центральный момент четвертого порядка.

Для нормального распределения $A_s = E_k = 0$.

При отклонении от нормального распределения асимметрия положительна, если «длинная» и более пологая часть кривой распределения расположена справа от соответствующей моде точки на оси абсцисс; если эта часть кривой расположена слева от моды, то асимметрия отрицательна (рис. 2.9, а, б).

Экссесс характеризует крутизну подъема кривой распределения по сравнению с нормальной кривой: если эксцесс положителен, то кривая имеет более высокую и острую вершину; в случае отрицательного эксцесса сравниваемая кривая имеет более низкую и пологую вершину (рис. 2.9, в).

Следует иметь в виду, что при использовании указанных характеристик сравнения опорными являются предположения об одинаковых величинах математического ожидания и дисперсии для нормального и теоретического распределений.

Пример 29. Пусть дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	3	5	8
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти асимметрию и эксцесс теоретического распределения.

Решение. Найдем сначала математическое ожидание случайной величины:

$$M(X) = \nu_1 = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,1 = 3,5.$$

Затем вычисляем начальные и центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков и среднее квадратическое отклонение (см. формулы (2.27)–(2.31)):

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,2 + 64 \cdot 0,1 = 15,9;$$

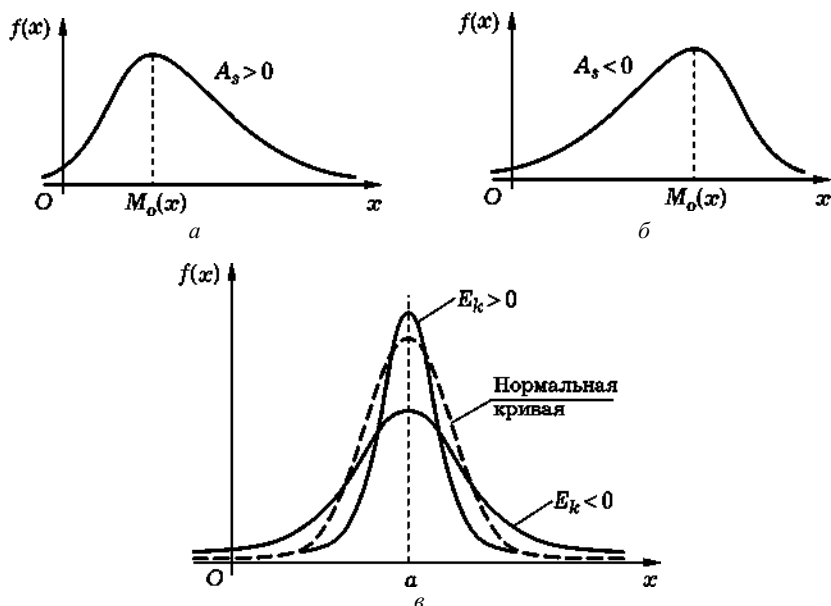


Рис. 2.9

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 + 27 \cdot 0,4 + 125 \cdot 0,2 + 512 \cdot 0,1 = 88,7;$$

$$\nu_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 + 81 \cdot 0,4 + 625 \cdot 0,2 + 4096 \cdot 0,1 = 570,3;$$

$$D(X) = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 15,9 - 12,25 = 3,65;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = 88,7 - 3 \cdot 15,9 \cdot 3,5 + 2 \cdot 3,5^3 = 7,5;$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 570,3 - 4 \cdot 88,7 \cdot 3,5 + 6 \cdot 15,9 \cdot 3,5^2 - \\ - 3 \cdot 3,5^4 = 570,3 - 1241,8 + 1168,65 - 450,19 = 46,96; \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1,91.$$

Теперь по формулам (2.73) и (2.74) находим искомые величины:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{7,5}{1,91^3} = 1,076;$$

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{46,96}{1,91^4} - 3 = 0,53.$$

В данном случае «длинная» часть кривой распределения расположена справа от моды, причем сама кривая является несколько более островершинной, чем нормальная кривая с теми же величинами математического ожидания и дисперсии.

Упражнения

2.1. Из коробки с 6 деталями, среди которых 4 стандартные, наудачу взяты 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — количества стандартных деталей среди отобранных.

2.2. Книга издана тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность брака в книге равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.

2.3. Случайная составляющая дохода равна $2X$, а случайная составляющая затрат — $50Y$. Найти дисперсию прибыли при следующих условиях: величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0,5$; величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$; случайные величины X и Y являются независимыми.

2.4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

2.5. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа отказов элемента некоторого устройства в 10 независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

2.6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

2.7. Дано распределение двумерной дискретной случайной величины (X, Y) :

$Y/X \rightarrow$	1	3	5
$\downarrow$			
2	0,2	0,1	0
4	0,1	0,2	0,1
6	0	0,1	0,2

Найти ковариацию $\text{Cov}(X, Y)$ и коэффициент корреляции X и Y .

2.8. Непрерывная случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + (\arctg x)/\pi$. Найти вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1)$.

2.9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 0,5x - 1, & 2 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значения: а) менее 0,2; б) менее 3; в) не менее 3; г) не менее 5.

2.10. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

2.11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \pi/6; \\ 3 \sin 3x, & \pi/6 < x \leq \pi/3; \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

2.12. Случайная величина X задана на положительной полуоси Ox функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-ax}$ ($a > 0$). Найти математическое ожидание величины X .

2.13. Случайная величина X задана на интервале $(0, 5)$ плотностью распределения $f(x) = 2x/25$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X .

2.14. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = e^{-|x|}/2$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2.15. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0; \\ 1 - x_0^3/x^3, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (x_0 > 0).$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2.16. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , распределенной равномерно в интервале $(2, 8)$.

2.17. Ребро куба x измерено приближенно в интервале (a, b) . Найти математическое ожидание и дисперсию объема куба, если его ребро рассматривать как случайную величину X с равномерным распределением на указанном интервале.

2.18. Размер мужских сорочек является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 39 и дисперсией 9. Какой процент общего объема заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40-го размера воротничка при условии, что этот размер находится в интервале $(39,5, 40,5)$?

2.19. Найти формулу плотности вероятности нормально распределенной случайной величины X , если математическое ожидание равно 3, а дисперсия — 16.

2.20. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал $(10, 15)$ равна 0,2. Найти вероятность попадания X в интервал $(35, 40)$.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика представляет собой часть общей прикладной математической дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», однако задачи, решаемые ею, имеют специфический характер. Если теория вероятностей исследует явления, *полностью* заданные их моделью, то в математической статистике вероятностная модель определена *с точностью до неизвестных параметров*. Отсутствие сведений о параметрах компенсируется «пробными» испытаниями, по результатам которых и восстанавливается недостающая информация. Цель математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Первая задача математической статистики заключается в указании методов сбора и группировки статистических сведений, которые получены в результате экспериментов или наблюдений. Вторая задача — разработка методов анализа статистических данных: оценка неизвестных вероятности события, а также функций и параметров распределения; оценка зависимости случайной величины от других случайных величин; проверка статистических гипотез о виде и величинах параметров неизвестного распределения. Рассмотрим некоторые из этих вопросов.

3.1. Выборочный метод

3.1.1. Выборки

На практике сплошные исследования (каждого объекта из интересующей нас совокупности) проводят крайне редко. К тому же, если совокупность содержит большое число объектов или исследование объекта требует нарушения его функционального стандарта, то сплошное исследование нереально. В таких случаях из всей совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их исследованию.

Введем основные понятия, связанные с выборками. *Генеральной совокупностью* называется совокупность объектов, из которых проводится выборка. *Выборочной совокупностью (выборкой)* именуется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности. Число объектов в совокупности называется ее *объемом*.

Пример 1. Пусть из 2000 изделий для исследования отобрано 100 изделий. Тогда объем генеральной совокупности $N = 2000$, а объем выборки $n = 100$.

Существует два способа выборки:

повторная (после исследования объект из выборки возвращается в генеральную совокупность);

бесповторная (объект не возвращается в генеральную совокупность).

Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если по результатам ее исследования можно достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности.

3.1.2. Способы отбора

Различают два вида способов отбора: без расчленения генеральной совокупности на части и с расчленением.

К первому виду относятся *простые случайные* отборы (повторные либо бесповторные), когда объекты извлекают по одному из генеральной совокупности; такой отбор можно проводить с использованием таблицы случайных чисел.

Второй вид способов отбора включает в себя следующие разновидности соответственно способам расчленения генеральной совокупности. Отбор, при котором объекты отбираются из каждой «типической» части генеральной совокупности, называется *типическим*. Например, отбор деталей из продукции каждого станка, а не из общего количества деталей, является типическим. Если генеральную совокупность делят на число групп, равное объему выборки, с последующим отбором из каждой группы по одному объекту, то такой отбор называется *механическим*. При *серийном* отборе объекты отбираются не по одному, а сериями; этот способ используется, когда исследуемый признак имеет незначительные колебания в различных сериях.

На практике указанные способы отбора часто комбинируют. Например, генеральную совокупность разбивают на серии одинакового объема, затем случайным образом отбирают несколько серий и в завершение случайным извлечением отдельных объектов составляют выборку. Конкретная комбинация способов отбора объектов из генеральной совокупности определяется требованием репрезентативности выборки.

3.1.3. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n , в которой значение x_1 некоторого исследуемого признака X наблюдалось n_1 раз, значение x_2 — n_2 раз, ..., значение x_k — n_k раз. Значения x_i называются *вариантами*, а их последовательность, записанная в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*. Числа n_i называются *частотами*, а их отношения к объему выборки

$$W_i = \frac{n_i}{n} \quad (3.1)$$

— *относительными частотами*. При этом $\sum n_i = n$. Модой M_0 называется варианта, имеющая наибольшую частоту. Медианой m_e называется варианта, которая делит вариационный ряд на две части с одинаковым числом вариантов в каждой. Если число вариантов нечетно, т.е. $k = 2l + 1$, то $m_e = x_{l+1}$; если же число вариантов четно ($k = 2l$), то $m_e = (x_l + x_{l+1})/2$. Размахом варьирования называется разность между максимальной и минимальной вариантами, или длина интервала, которому принадлежат все варианты выборки:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (3.2)$$

Перечень вариантов и соответствующих им частот называется *статистическим распределением выборки*. Здесь имеется аналогия с законом распределения случайной величины: в теории вероятностей — это соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике — это соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами (относительными частотами). Нетрудно видеть, что сумма относительных частот равна единице: $\sum W_i = 1$.

Пример 2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12	17
n_i	2	4	5	6	3

Найти распределение относительных частот и основные характеристики вариационного ряда.

Решение. Найдем объем выборки: $n = 2 + 4 + 5 + 6 + 3 = 20$.

Относительные частоты соответственно равны: $W_1 = 2/20 = 0,1$; $W_2 = 4/20 = 0,2$; $W_3 = 5/20 = 0,25$; $W_4 = 6/20 = 0,3$; $W_5 = 3/20 = 0,15$.

Контроль: $0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,3 + 0,15 = 1$. Искомое распределение относительных частот имеет вид:

x_i	4	7	8	12	17
W_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

Мода этого вариационного ряда равна 12. Число вариантов в данном случае нечетно $k = 2 \cdot 2 + 1$, поэтому медиана $m_e = x_3 = 8$. Согласно формуле (3.2) размах варьирования $R = 17 - 4 = 13$.

3.1.4. Эмпирическая функция распределения

Пусть n_x — число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака X , меньшее x . При объеме выборки, равном n , относительная частота события $X < x$ равна n_x/n .

Определение 1. Функция, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \quad (3.3)$$

называется *эмпирической функцией распределения*, или функцией распределения выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения $F^*(x)$ выборки функция распределения $F(x)$ генеральной совокупности называется *теоретической функцией распределения*. Различие между ними состоит в том, что функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ — относительную частоту этого события. Из теоретических результатов общей теории вероятностей (закон больших чисел) следует, что при больших n вероятность отличия этих функций друг от друга близка к единице:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$, что вытекает из определения 1 и формулы (3.3):

- 1) значения $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$;
- 2) $F^*(x)$ является неубывающей функцией;
- 3) пусть x_m и x_M — соответственно минимальная и максимальная варианты, тогда $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_m$ и $F^*(x) = 1$ при $x \geq x_M$.

Сама же функция $F^*(x)$ служит для оценки теоретической функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности.

Пример 3. Построить эмпирическую функцию по заданному распределению выборки:

x_i	2	4	6
n_i	10	15	25

Решение. Находим объем выборки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Наименьшая варианта равна 2, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \leq 2$. Значение $X < 4$ (или $x_1 = 2$) наблюдалось 10 раз, значит, $F^*(x) = 10/50 = 0,2$ при $2 < x < 4$. Значения $X < 6$ (а именно $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$) наблюдались 25 (10 + 15) раз, значит, при $4 < x < 6$ функция $F^*(x) = 25/50 = 0,5$. Поскольку $x = 6$ — максимальная варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 6$. Напишем формулу искомой эмпирической функции:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 0,2, & 2 < x \leq 4; \\ 0,5, & 4 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 3.1.

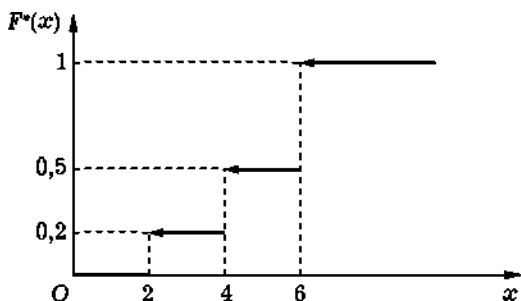


Рис. 3.1

3.1.5. Полигон и гистограмма

Каждую пару значений (x_i, n_i) из распределения выборки можно трактовать как точку на координатной плоскости. Точно так же можно рассматривать и пары значений (x_i, W_i) относительного распределения выборки. Ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i) , называется *полигоном частот*. Ломаная, соединяющая на координатной плоскости точки (x_i, W_i) , называется *полигоном относительных частот*. На рис. 3.2 показан полигон относительных частот для распределения, приведенного в примере 2.

Интервал $(x_{\min}, x_{\max})$ наблюдаемых значений непрерывного признака X удобно разбить на несколько частичных интервалов длиной h каждый и найти для каждого из этих интервалов сумму частот n_j , попавших в него. Ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями длиной h и высотами n_j/h (плотность частоты), называется *гистограммой частот*. Геометрический смысл гистограммы заключается в том, что ее площадь равна сумме всех частот или объему выборки. На рис. 3.3 изображена гистограмма выборки объема $n = 100$.

Аналогичным образом определяется и *гистограмма относительных частот*. Высоты прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, определяются отношениями сумм относительных частот, попадающих в интервал

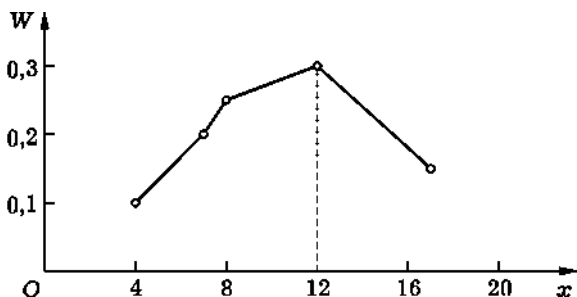


Рис. 3.2

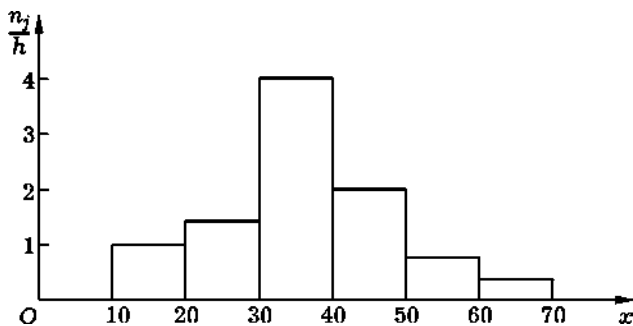


Рис. 3.3

$(x_{\min} + (j-1)h, x_{\min} + jh)$, к длине интервала h , т.е. величинами W_j/h . В этом случае площадь гистограммы относительных частот равна единице (сумме относительных частот выборки).

3.2. Статистические оценки параметров распределения

Рассмотрим значения количественного признака $x_1, x_2, \dots, x_n$ в выборке как независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$. Тогда нахождение статистической оценки неизвестного параметра теоретического распределения означает отыскание функции от наблюдаемых случайных величин, которая и даст нам приближенное значение искомого параметра.

3.2.1. Виды статистических оценок

Несмещенной называется статистическая оценка ϑ_* , математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру ϑ при любой выборке:

$$M(\vartheta_*) = \vartheta. \quad (3.5)$$

Смещенной называется оценка, для которой условие (3.5) не выполнено. *Эффективной* называется оценка, которая имеет минимальную дисперсию при заданном объеме выборки n . *Состоятельной* называется статистическая оценка типа (3.4), которая при $n \rightarrow \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Теперь укажем виды числовых характеристик оценок, прежде всего это средние:

генеральная средняя для изучаемого количественного признака X по генеральной совокупности

$$\bar{x}_r = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

и выборочная средняя

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{n}.$$

Если значения признака $x_1, x_2, \dots, x_k$ в выборке имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \dots, n_k$, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i. \quad (3.6)$$

Можно показать, что выборочная средняя (3.6) является несмещенной оценкой; это аналог математического ожидания случайной величины X_B .

Введем в рассмотрение величины, характеризующие отклонение значений количественного признака X от его среднего значения. Это *генеральная дисперсия*

$$D_\Gamma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_\Gamma)^2 \quad (3.7)$$

и *выборочная дисперсия*

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2. \quad (3.8)$$

Для вычисления этих характеристик используются более удобные формулы, аналогичные дисперсии случайной величины; так, формула (3.8) для выборочной дисперсии принимает вид

$$D_B = \sigma_B^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x}_B)^2. \quad (3.9)$$

Соответственно определяются *генеральное и выборочное средние квадратические отклонения*

$$\sigma_\Gamma = \sqrt{D_\Gamma}, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}. \quad (3.10)$$

Выборочная дисперсия (3.8) является состоятельной, но смещенной оценкой. Статистическая оценка, которая называется *исправленной дисперсией*,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2, \quad (3.11)$$

является состоятельной несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Пример 4. Выборка задана таблицей распределения

x_i	1	2	3	5
n_i	15	20	10	5

Найти выборочные характеристики: среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. По формуле (3.6) сначала находим $\bar{x}_B$:

$$\bar{x}_B = \frac{15 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 5}{15 + 20 + 10 + 5} = \frac{110}{50} = 2,2.$$

Затем по формулам (3.9), (3.10) находим две другие искомые величины:

$$D_B = \frac{15 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 5 \cdot 25}{50} - 2,2^2 = 6,2 - 4,84 = 1,36;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1,36} = 1,166.$$

3.2.2. Виды дисперсий

Значения количественного признака X совокупности часто объединяются в некоторое число групп. Каждую группу можно рассматривать как самостоятельную выборку, и для каждой группы можно определить групповую среднюю и дисперсию. Пусть r — число групп. *Групповой дисперсией* называется дисперсия значений признака в группе относительно групповой средней:

$$D_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} n_i (x_i - \bar{x}_j)^2, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (3.12)$$

где n_i — частота значения x_i в группе; j — номер группы; $\bar{x}_j$ — групповая средняя j -й группы; $N_j = \sum n_i$ — объем j -й группы.

Зная дисперсию каждой группы, можно определить их среднюю арифметическую. *Внутригрупповой дисперсией* называется средняя арифметическая дисперсий, где каждое слагаемое входит с весом объема группы:

$$D_{\text{внгр}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r N_j D_j. \quad (3.13)$$

Зная для всех групп средние $\bar{x}_j$ и общую среднюю $\bar{x}$, введем еще одно понятие. *Межгрупповой дисперсией* называется дисперсия групповых средних

относительно общей средней:

$$D_{\text{мгр}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r N_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2, \quad (3.14)$$

где $n = \sum_{j=1}^r N_j$ — объем всей совокупности.

Для общей дисперсии всей совокупности справедлива следующая теорема, которая приводится без доказательства.

Теорема 3.1. Если совокупность состоит из нескольких групп, то общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{внгр}} + D_{\text{мгр}}, \quad (3.15)$$

где слагаемые в правой части определяются соответственно формулами (3.13) и (3.14). ■

Поясним сказанное на примере.

Пример 5. Совокупность состоит из двух следующих групп:

Первая группа				Вторая группа		
x_i	2	4	5	x_i	4	9
n_i	1	7	2	n_i	3	2

Найти групповые, внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии.

Решение. Объемы групп соответственно равны $N_1 = 10$ и $N_2 = 5$. Общий объем совокупности $n = 10 + 5 = 15$. Найдем групповые средние:

$$\bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{10} = 4; \quad \bar{x}_2 = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 9}{5} = 6.$$

Теперь рассчитаем групповые дисперсии по формуле (3.12):

$$D_1 = \frac{1 \cdot (2-4)^2 + 7 \cdot (4-4)^2 + 2 \cdot (5-4)^2}{10} = 0,6;$$

$$D_2 = \frac{3 \cdot (4-6)^2 + 2 \cdot (9-6)^2}{5} = 6.$$

Внутригрупповая дисперсия согласно формуле (3.13) равна:

$$D_{\text{внгр}} = \frac{10 \cdot 0,6 + 5 \cdot 6}{15} = 2,4.$$

Теперь найдем межгрупповую дисперсию по формуле (3.14), для чего сначала определим общую среднюю:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3};$$

$$D_{\text{мгп}} = \frac{10 \cdot (4 - 14/3)^2 + 5 \cdot (6 - 14/3)^2}{15} = \frac{4}{9}.$$

Наконец, общая дисперсия согласно формуле (3.15) равна:

$$D_{\text{общ}} = 2,4 + \frac{4}{9} \approx 2,84.$$

3.2.3. Эмпирические моменты

Для вычисления сводных характеристик выборок используют эмпирические моменты, аналогичные соответствующим теоретическим моментам. *Обычным эмпирическим моментом порядка s* называется среднее значение s -х степеней разностей $x_i - C$, где x_i — наблюдаемая варианта, C — произвольная постоянная (ложный нуль — либо мода, либо любая варианта, расположенная примерно в середине вариационного ряда):

$$M'_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - C)^s. \quad (3.16)$$

При $C = 0$ имеем начальные эмпирические моменты порядка s ; в частности, в случае $s = 1$:

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \bar{x}_B.$$

Центральным эмпирическим моментом порядка s называется обычный момент (3.16) при $C = \bar{x}_B$:

$$m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^s. \quad (3.17)$$

В частности, центральный момент второго порядка:

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 = D_B, \quad (3.18)$$

иными словами, он совпадает с выборочной дисперсией.

3.2.4. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения

Нормальное распределение является одним из наиболее применяемых в математической статистике. Для оценки отклонения эмпирического распределения от нормального используют следующие характеристики.

Асимметрия эмпирического распределения определяется таким равенством:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_B^3}. \quad (3.19)$$

Эксцесс эмпирического распределения определяется так:

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3. \quad (3.20)$$

В формулы (3.19) и (3.20) входят центральные эмпирические моменты, определяемые формулой (3.17), а также выборочное среднее квадратическое отклонение (3.10). Асимметрия и эксцесс служат для сравнения полигона эмпирического распределения с нормальным распределением: знак a_s указывает на расположение длинной части ломаной относительно математического ожидания (справа при $a_s > 0$ и слева при $a_s < 0$); e_k характеризует «крутость» ломаной (при $e_k > 0$ сравниваемая кривая более высокая и острая, при $e_k < 0$ она более низкая и плоская, см. подразд. 2.5.6).

Пример 6. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения:

варианта	1	2	3	4	5	6	10
частота	5	10	15	35	16	15	4

Решение. Найдем сначала $\bar{x}_B$ и σ_B по формулам (3.6)–(3.10):

$$\bar{x}_B = \frac{5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 35 \cdot 4 + 16 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 4 \cdot 10}{5 + 10 + 15 + 35 + 16 + 15 + 4} = 4,2;$$

$$D_B = \frac{5 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 9 + 35 \cdot 16 + 16 \cdot 25 + 15 \cdot 36 + 4 \cdot 100}{5 + 10 + 15 + 35 + 16 + 15 + 4} - 4,2^2 = 3,16;$$

$$\sigma_B = 1,887.$$

Далее, используя формулы (3.17), определяем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3 = \left(5 \cdot (-3,2)^3 + 10 \cdot (-2,2)^3 + 15 \cdot (-1,2)^3 + 35 \cdot (-0,2)^3 + \right. \\ \left. + 16 \cdot 0,8^3 + 15 \cdot 1,8^3 + 4 \cdot 5,8^3 \right) \cdot \frac{1}{100} = \frac{579,6}{100} = 5,796;$$

$$m_4 = \left(5 \cdot (-3,2)^4 + 10 \cdot (-2,2)^4 + 15 \cdot (-1,2)^4 + 35 \cdot (-0,2)^4 + \right. \\ \left. + 16 \cdot 0,8^4 + 15 \cdot 1,8^4 + 4 \cdot 5,8^4 \right) \cdot \frac{1}{100} = \frac{5480,32}{100} = 54,8032.$$

Затем по формулам (3.19) и (3.20) находим искомые величины:

$$a_s = \frac{5,796}{1,778^3} = 1,032; \quad e_k = \frac{54,8032}{1,778^4} - 3 = 2,488.$$

3.3. Точечные оценки параметров распределения

В теории и практике методов математической статистики нередко возникает вопрос о близости выборки к тому или иному теоретическому распределению. В этом случае появляется необходимость вычисления оценок соответствующих параметров распределения. Поскольку эти оценки определяются одним числом, они называются *точечными*. Приведем два наиболее часто используемых метода точечной оценки.

3.3.1. Метод моментов

Можно полагать, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов. На этом предположении базируется метод моментов, разработанный К. Пирсоном* и широко используемый ввиду сравнительной простоты. Метод основан на приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. При этом различают случаи распределений с одним параметром и с двумя параметрами.

1. *Оценка одного параметра.* Пусть задана плотность распределения $f(x, \vartheta)$ с одним параметром. Согласно методу моментов приравниваем, например, соответствующие начальные моменты первого порядка, т.е. среднюю выборки $\bar{x}_в$ и математическое ожидание распределения $M(X)$. Здесь достаточно одного уравнения относительно этого параметра:

$$M(X) = \bar{x}_в. \quad (3.21)$$

Поскольку математическое ожидание является функцией параметра ϑ (см. формулу (2.55)):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, \vartheta) dx = \varphi(\vartheta), \quad (3.22)$$

соотношение (3.21) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным, которое определяет точечную оценку параметра ϑ , являющуюся функцией варианты выборки:

$$\vartheta^* = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.23)$$

*Пирсон Карл (1857–1936) — английский математик.

Пример 7. Методом моментов по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ найти точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения с известной функцией плотности распределения $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$).

Решение. Формула (3.22) при помощи интегрирования по частям дает: $M(X) = 1/\lambda$. Далее из формулы (3.21) получаем, что $\lambda = 1/\bar{x}_B$, т.е. искомая точечная оценка параметра λ показательного распределения равна обратной выборочной средней: $\lambda^* = 1/\bar{x}_B$.

2. Оценка двух параметров. Пусть задана функция плотности распределения $f(x, \vartheta_1, \vartheta_2)$. Для нахождения двух неизвестных параметров нужно иметь два уравнения, поэтому приравняем друг другу соответственно начальные теоретические и эмпирические моменты первого и второго порядков:

$$M(X) = \bar{x}_B, \quad D(X) = D_B. \quad (3.24)$$

Поскольку $M(X)$ и $D(X)$ есть функции от ϑ_1 и ϑ_2 , соотношения (3.24) определяют точечные оценки этих параметров как функции от варианты выборки:

$$\vartheta_1^* = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \vartheta_2^* = \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.25)$$

Пример 8. Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения с функцией плотности распределения вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Решение. Как известно (см. формулы (2.62), $M(X) = a$, $D(X) = \sigma$. Используя формулы (3.24), получаем искомые точечные оценки параметров нормального распределения: $a^* = \bar{x}_B$, $\sigma^* = \sqrt{D_B}$.

3.3.2. Метод наибольшего правдоподобия

Этот метод был предложен Р. Фишером. Рассмотрим его для дискретных и непрерывных случайных величин.

Дискретные случайные величины. Пусть X — дискретная случайная величина, которая приняла значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ в результате n испытаний. Пусть известен закон распределения величины X , но неизвестен определяющий его параметр ϑ . Требуется найти точечную оценку этого параметра.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i , через $p(x_i, \vartheta)$.

Определение 2. Функция аргумента ϑ

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta) = p(x_1, \vartheta)p(x_2, \vartheta) \dots p(x_n, \vartheta), \quad (3.26)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — фиксированные числа, называется *функцией правдоподобия дискретной случайной величины X* . Функцию

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta) = \ln [p(x_1, \vartheta)p(x_2, \vartheta) \dots p(x_n, \vartheta)] \quad (3.27)$$

называют *логарифмической функцией правдоподобия*.

В качестве точечной оценки параметра ϑ принимается его значение ϑ^* , при котором функция (3.26) достигает максимума. Такую оценку ϑ^* называют *оценкой наибольшего правдоподобия*. Точка максимумов у обеих функций одна и та же, но вместо функции L удобнее анализировать функцию $\ln L$.

Пример 9. Методом наибольшего правдоподобия найти оценку неизвестного параметра p биномиального распределения

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

если в n испытаниях событие A наступило k_1 раз, а в m испытаниях — k_2 раз.

Решение. Сначала составим функцию правдоподобия (в нашем случае $p = \vartheta$):

$$L = P_n(k_1)P_m(k_2) = C_n^{k_1} C_m^{k_2} p^{k_1+k_2} (1-p)^{n+m-k_1-k_2}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$\ln L = \ln(C_n^{k_1} C_m^{k_2}) + (k_1 + k_2) \ln p + (n + m - k_1 - k_2) \ln(1-p).$$

Затем находим производную по p и приравниваем ее нулю; получаем:

$$\frac{k_1 + k_2}{p} - \frac{n + m - k_1 - k_2}{1-p} = 0.$$

Решение этого уравнения относительно p дает: $p = \frac{k_1 + k_2}{n + m}$. Нетрудно убедиться, что вторая производная функции $\ln L$ отрицательна, т.е. полученное значение p является точкой максимума логарифмической функции правдоподобия, и, значит, эту величину нужно принять в качестве оценки наибольшего правдоподобия неизвестного параметра p^* биномиального распределения:

$$p^* = \frac{k_1 + k_2}{n + m}.$$

Непрерывные случайные величины. Пусть X — непрерывная случайная величина, которая приняла значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ в результате n испытаний.

Основное допущение состоит в том, что известна функция распределения плотности $f(x, \vartheta)$, но неизвестен ее определяющий параметр ϑ .

Определение 3. Функция аргумента ϑ

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta) = f(x_1, \vartheta)f(x_2, \vartheta) \dots f(x_n, \vartheta), \quad (3.28)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — фиксированные числа, называется *функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X* .

Метод оценки наибольшего правдоподобия неизвестного параметра ϑ такой же, как и в предыдущем случае: поиск точки максимума функции L . Если в известной функции распределения $f(x, \vartheta_1 \vartheta_2)$ неизвестны два параметра, то функция правдоподобия имеет вид:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \vartheta_1, \vartheta_2) = f(x_1, \vartheta_1, \vartheta_2)f(x_2, \vartheta_1, \vartheta_2) \dots f(x_n, \vartheta_1, \vartheta_2), \quad (3.29)$$

и тогда ищется точка максимума функции двух переменных.

Соответствующие логарифмические функции наибольшего правдоподобия вводятся так же, как и в случае дискретной случайной величины.

Пример 10. Методом наибольшего правдоподобия найти оценку параметра λ показательного распределения из примера 7.

Решение. Составим функцию правдоподобия (3.28). В нашем случае $\vartheta = \lambda$:

$$L = (\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2}) \dots (\lambda e^{-\lambda x_n}) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}.$$

Отсюда найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Производную этой функции приравняем нулю, откуда получаем

$$\lambda = \frac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{1}{\bar{x}_n}.$$

что совпадает с результатом примера 7.

3.4. Интервальные оценки параметров распределения

3.4.1. Доверительный интервал

При малых объемах выборки точечная оценка может приводить к большим ошибкам и значительно отличаться от оцениваемого параметра. Более широкое применение получил метод доверительных интервалов, разработанный

американским статистиком Дж. Нейманом*. В дальнейшем этот метод нам понадобится.

Определение 4. *Доверительным интервалом для параметра ϑ с надежностью оценки p называется числовой промежуток $(\vartheta^* - \delta, \vartheta^* + \delta)$, содержащий истинное значение данного параметра с вероятностью, равной p :*

$$P(\vartheta^* - \delta < \vartheta < \vartheta^* + \delta) = p, \quad (3.30)$$

где ϑ^* — оценка неизвестного параметра ϑ (например, точечная оценка), $\delta > 0$ — некоторое число.

Обычно надежность оценки p задается числом, близким к единице. Иными словами, доверительный интервал покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью. Число $\alpha = 1 - p$ называется *уровнем значимости*. Общая схема построения доверительных интервалов сводится к следующему.

1. Рассматриваются теоретические выборки случайных величин, с распределениями которых связан параметр ϑ .
2. Подбирается случайная величина Y с известным распределением, значения которой определяются выборками и параметром ϑ : $Y = Y(\vartheta)$.
3. По известному распределению Y подбираются числа Y_1 и Y_2 , такие, чтобы выполнялось равенство $P(Y_1 < Y(\vartheta) < Y_2) = p$.
4. По значениям Y_1 и Y_2 определяется число $\delta > 0$ при известном значении ϑ^* . Таким образом, условие (3.30) будет выполнено и доверительный интервал построен.

Пример 11. Найти доверительные интервалы надежности $p_1 = 0,95$ и $p_2 = 0,99$ для нормальной случайной величины X с функцией распределения $N(0, 1)$ — см. формулу (2.62).

Решение. В первом случае $p_1/2 = 0,475$; из равенства $\Phi(x) = 0,475$ по табл. 2 Приложения определяем $x = 1,96$, т.е. при уровне значимости $\alpha = 0,05$ $X \in (-1,96, 1,96)$. Во втором случае из аналогичного равенства $\Phi(x) = 0,495$ получаем $x = 2,57$, т.е. при уровне значимости $\alpha = 0,01$ $X \in (-2,58, 2,58)$.

3.4.2. Интервальные оценки математического ожидания нормального распределения

Приведем интервальные оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины. Здесь нужно различать два основных случая.

*Нейман Джерси (1894–1981) — американский статистик.

1. Интервальная оценка при известном σ . Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma, \quad (3.31)$$

где $\bar{X}$ — выборочная средняя; δ — точность; γ — заданная надежность. Поскольку функция интеграла вероятностей $\Phi(x)$ нечетная,

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \gamma.$$

Мы рассматриваем выборочные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ как одинаково распределенные независимые случайные величины и выборочную среднюю — также как случайную величину, меняющуюся от выборки к выборке. В таком случае, заменяя σ на $\sigma/\sqrt{n}$ (см. п. 2.4.4), где n — объем выборки, получаем

$$P\left(|\bar{X} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Таким образом, интервальной оценкой с надежностью γ неизвестного математического ожидания a по выборочному среднему $\bar{x}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ является доверительный интервал

$$\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (3.32)$$

где n — объем выборки; $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ — точность оценки; t — значение аргумента функции $\Phi(t)$, которое определяется из условия

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} \quad (3.33)$$

по табл. 2 приложения. В формуле (3.32) случайная величина заменена на неслучайную величину $\bar{x}$, найденную по выборке.

Пример 12. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Объем выборки $n = 36$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\bar{x} = 4$ и $\bar{x} = 7,5$ при заданной надежности $\gamma = 0,95$.

Решение. Из условия $2\Phi(t) = 0,95$ по табл. 2 Приложения находим $t = 1,96$. Далее определяем точность оценки: $\delta = 1,96 \cdot 3/6 = 0,98$. Согласно формуле (3.32) доверительный интервал имеет вид:

$$(\bar{x} - 0,98, \bar{x} + 0,98).$$

Отсюда получаем доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $\bar{x} = 4$ и $\bar{x} = 7,5$ соответственно

(3,02, 4,98), (6,52, 8,48) с надежностью 0,95. В данном примере надежность 0,95 означает, что при достаточно большом числе выборок 95% из них определяет указанные доверительные интервалы, в которых параметр a заключен, и только в 5% случаев этот параметр может выйти за границы доверительного интервала.

2. Интервальная оценка при неизвестном σ . Для этого случая можно построить случайную величину T , имеющую распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы:

$$T = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}}, \quad (3.34)$$

где S — «исправленное» среднее квадратическое отклонение, а $\bar{X}$ и n имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае.

Принимается, что неизвестная случайная величина S описывается распределением Стьюдента, которое в данном случае определяется объемом выборки n и не зависит от неизвестных параметров a и σ . Далее при известном виде плотности этого распределения $S(t, n)$, (см. формулу (2.70)) проводится та же процедура, что и в предыдущем случае, с той лишь разницей, что вместо функции $\Phi(t)$ используется интеграл от функции $S(t, n)$, который табулирован, как и функция $\Phi(t)$. В итоге получается формула для оценки доверительного интервала покрытия a с заданной надежностью γ :

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = \gamma,$$

где t_γ определяется из условия, аналогичного соотношению (3.33).

Таким образом, доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ , имеет вид

$$\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right), \quad (3.35)$$

где $\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$ — точность оценки. Здесь случайные величины $\bar{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\bar{x}$ и s , найденными по выборке.

Пример 13. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 36$ найдены выборочная средняя $\bar{x} = 20$ и $s = 0,8$. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a с надежностью 0,95.

Решение. Пользуясь табл. 8 Приложения, находим при $\gamma = 0,95$ и $k = n - 1 = 35$: $t_\gamma = 2,032$. Следовательно, точность $\sigma = 0,27$. Наконец, по формуле (3.35) получаем доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью 0,95: (19,73, 20,27).

В заключение отметим, что малый объем выборки заметно влияет на увеличение доверительного интервала; это непосредственно видно из формул (3.32) и (3.35). Иными словами, малые выборки существенно загроубляют и «размазывают» оценки неизвестных параметров.

3.5. Статистические оценки статистических гипотез

Обычно в практических задачах не встречаются случайные величины, распределения которых точно соответствовали бы теоретическим распределениям. Последние представляют собой математические модели реальных распределений. Подбор таких моделей и анализ их адекватности моделируемым случайным величинам являются одной из основных задач математической статистики. Эта задача в свою очередь сводится к проверке предположений (гипотез) о виде модели распределения и о ее параметрах.

Определение 5. *Статистической* называется гипотеза о виде неизвестного распределения, о параметрах известных распределений, об отношениях между случайными величинами и т.д.

3.5.1. Виды статистических гипотез

Определение 6. *Нулевой (основной)* гипотезой называется выдвинутая гипотеза H_0 .

Определение 7. *Конкурирующей (альтернативной)* гипотезой называется гипотеза H_1 , которая противоречит нулевой гипотезе H_0 .

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание нормального распределения $a = 5$, то конкурирующая гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 5$. В краткой записи: $H_0: a = 5$; $H_1: a \neq 5$.

Гипотезы бывают *простые* (содержащие только одно предположение) и *сложные* (состоящие из конечного или бесконечного числа простых гипотез). Наиболее распространены два типа гипотез:

1) *параметрические гипотезы* — при известном виде распределения предположения о неизвестных характеристиках этих распределений;

2) *предположение о виде распределения* — при известной случайной величине (выборке).

3.5.2. Общая схема проверки статистических гипотез

Определение 8. *Статистическим критерием* (или просто критерием) называют случайную величину T , которая служит для проверки статистических гипотез.

Приведем схему проверки статистических гипотез.

1. Для основной гипотезы H_0 формулируется альтернативная гипотеза H_1 .
2. Выбирается малое положительное число α — уровень значимости проверки. Обычно α колеблется в пределах от 0,01 до 0,05.

3. Рассматриваются теоретические выборки значений случайных величин, о которых сформулирована гипотеза H_0 , и выбирается (формируется) случайная величина T . Значения и распределение T полностью определяются по выборкам при предположении о верности гипотезы H_0 . Величина T называется *статистикой* или *тестом* критерия.

4. На числовой оси задают интервал D , такой, что вероятность попадания теста T в этот интервал равна $p = 1 - \alpha$:

$$P(T \in D) = 1 - \alpha. \quad (3.36)$$

Интервал D называется *областью принятия гипотезы H_0* , а оставшаяся область числовой оси — *критической областью*. В ряде случаев за область D принимают один из интервалов: $(-\infty, t_{кр}]$, $[-t_{кр}, t_{кр}]$, $[t_{кр}, \infty)$, где число $t_{кр}$ — *критическое значение теста проверки*. Соответственно этим интервалам критерий проверки называется *правосторонним*, *двусторонним* или *левосторонним*. Соответствующие области отклонения гипотезы H_0 : $(t_{кр}, \infty)$, $(-\infty, -t_{кр}) \cup (t_{кр}, \infty)$ и $(-\infty, t_{кр})$.

5. По реализациям анализируемых теоретических выборок вычисляется конкретное (наблюдаемое) значение теста T (обозначим его t_c) и проверяется выполнение условия (3.36):

а) если оно выполняется, то гипотеза H_0 принимается в том смысле, что она не противоречит опытным данным;

б) если же условие (3.36) не выполняется, то полагается, что гипотеза H_0 неверна и вероятность этого события определена неверно.

Из представленной схемы следует, что при проверке гипотезы H_0 возможны такие ошибки:

ошибка первого рода — отвергнуть гипотезу H_0 при ее правильности, вероятность этой ошибки равна α ;

ошибка второго рода — принять гипотезу H_0 при правильности альтернативной гипотезы H_1 .

Пусть вероятность ошибки второго рода равна β , тогда число $1 - \beta$ называют *мощностью* критерия. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода. При выбранном уровне значимости критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Можно показать, что в случае ограниченного интервала области принятия гипотезы H_0 (двусторонней критической области) существует связь интервала D , определяемого по формуле (3.36), с доверительным интервалом, определяемым по формуле (3.30).

3.5.3. Типы статистических критериев проверки гипотез

Любой критерий не доказывает справедливость проверяемой гипотезы H_0 , а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее соответствие или несоответствие с данными наблюдений. Укажем наиболее часто используемые критерии проверки статистических гипотез:

- 1) критерий χ^2 , или критерий Пирсона;
- 2) критерий Стьюдента;
- 3) критерий Фишера;
- 4) критерий Колмогорова*.

Обычно один из указанных критериев и применяют при составлении теста критерия проверки (см. п. 4 схемы проверки статистических гипотез). Основой для составления формул критериев Пирсона, Стьюдента и Фишера являются соответствующие соотношения (2.67), (2.69) и (2.71).

Рассмотрим примеры проверки статистических гипотез с использованием критериев χ^2 и Стьюдента.

Пример 14. Заданы эмпирические и теоретические частоты (n_i и n'_i) при числе групп выборки $s = 8$:

n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
n'_i	3	14	42	82	99	76	37	13

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу H_0 с левосторонним критерием о нормальном распределении генеральной совокупности.

Решение. Наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}, \quad (3.37)$$

* Колмогоров А.Н. (1903–1987) — известный советский математик.

или, что то же самое, по упрощенной формуле

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \sum_{i=1}^s \frac{n_i^2}{n'_i} - n, \quad (3.38)$$

где $n = \sum n_i = \sum n'_i$ — объем выборки. В нашем случае $n = 366$. Используя данные исходной таблицы, получаем:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{набл}}^2 = \frac{36}{3} + \frac{169}{14} + \frac{1444}{42} + \frac{5476}{82} + \frac{11\,236}{99} + \frac{7225}{76} + \\ + \frac{900}{37} + \frac{196}{13} - 366 = 373,19 - 366 = 7,19. \end{aligned}$$

Далее находим число степеней свободы $k = s - 3 = 8 - 3 = 5$ (число групп выборки минус один — это число степеней свободы распределения Пирсона, и минус еще два, так как нормальное распределение характеризуется двумя параметрами — математическим ожиданием и дисперсией). По таблице критических точек распределения χ^2 (см. табл. 4 Приложения) по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы 5 находим критическое значение теста $\chi_{\text{кр}}^2 = 11,1$. Так как $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, оснований отвергать нулевую гипотезу H_0 нет, т.е. расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Иными словами, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не противоречит данным наблюдений.

Пример 15. Для независимых наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ проверим гипотезу H_0 : математическое ожидание $m = m_0$ при двусторонней альтернативной гипотезе $H_1: m \neq m_0$. Уровень значимости α задан.

Решение. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы согласно формуле (3.34) примем случайную величину

$$T = \frac{(\bar{x} - m_0)\sqrt{n}}{s},$$

где s — оценка среднего квадратического отклонения. Величина T имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы. По таблице распределения Стьюдента при заданном n находим критическую точку $t_{1-\alpha, n-1} = t_p$, определяющую доверительный интервал

$$P(|T(n-1)| < t_p) = p = 1 - \alpha.$$

Тогда критическая область определяется неравенством $|T(n-1)| > t_p$. Гипотеза H_0 не отклоняется на уровне значимости α , если

$$\left| \frac{(\bar{x} - m_0)\sqrt{n}}{s} \right| < t_p \quad \text{или} \quad m_0 \in \left(\bar{x} - \frac{t_p s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_p s}{\sqrt{n}} \right).$$

В противном случае, если гипотетическое значение m_0 не покрывается доверительным интервалом с заданной надежностью p , то гипотеза H_0 отклоняется.

3.6. Закон больших чисел

Оказывается, что при некоторых достаточно общих условиях суммарное поведение большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится почти закономерным.

3.6.1. Неравенство Чебышева

Рассмотрим дискретную случайную величину, заданную таблицей распределения

$$\begin{array}{cccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

Представляет интерес оценка вероятности того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания (вероятностного среднего) не превышает по абсолютной величине заданного положительного числа ε .

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше некоторого числа $\varepsilon > 0$, не менее величины $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (3.39)$$

Неравенство Чебышева предваряет теорему Чебышева: для большого числа независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, можно считать почти достоверным событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет сколь угодно малым по абсолютной величине:

$$\frac{|(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - [M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)]|}{n} < \varepsilon. \quad (3.40)$$

Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, но их среднее арифметическое рассеяно мало.

3.6.2. Закон больших чисел

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p . Теорема Якоба Бернулли, известная как *закон больших чисел*, устанавливает относительную частоту появления этих событий. Если число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине, будет сколь угодно малым:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (3.41)$$

3.6.3. Центральная предельная теорема

Особое значение в теории случайных величин играет теорема, сформулированная русским математиком А.М. Ляпуновым, известная как *центральная предельная теорема*.

Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Центральная предельная теорема объясняет широкое распространение закона нормального распределения случайных величин.

3.7. Цепи Маркова

3.7.1. Основные понятия

Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из k состояний, причем в результате испытаний (изменения ее состояний) она переходит из одного состояния в другое: из состояния i в состояние j ($i, j = 1, 2, \dots, k$). Пусть также совокупность всех k состояний системы образует полную группу. Обозначим через $p_{ij}(s)$ условную вероятность того, что в s -м испытании система будет находиться в состоянии j , если после $(s - 1)$ -го испытания она находилась в состоянии i .

Цепью Маркова называется последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из k состояний, причем вероятность $p_{ij}(s)$ не зависит от результатов ранее проведенных испытаний. Различают цепи Маркова с *дискретным временем* (изменение состояний происходит в определенные фиксированные моменты времени) и с *непрерывным временем* (изменение состояний происходит в любые случайные возможные моменты времени).

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ не зависит от номера испытания s . В этом случае пишут просто p_{ij} . Далее мы будем рассматривать именно однородные цепи Маркова. Тогда p_{ij} называют *переходной вероятностью* (вероятность того, что система из состояния i в итоге следующего испытания перейдет в состояние j). При этом система может оставаться в состоянии i (в таком случае $j = i$).

Введем *матрицу перехода системы*, которая содержит все переходные вероятности данной системы:

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Поскольку элементами строк этой матрицы являются вероятности событий, образующих полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице, т.е. матрица (3.42) является стохастической:

$$\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (3.43)$$

Пример 16. Рассмотрим матрицу перехода

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Здесь первая строка состоит из величин вероятностей перехода системы из состояния 1 в состояния 1, 2 и 3 соответственно; вторая строка содержит вероятности перехода из состояния 2 в состояния 1, 2 и 3; третья строка — вероятности перехода из состояния 3 в состояния 1, 2 и 3.

3.7.2. Равенство Маркова

Обозначим через $P_{ij}(n)$ вероятность того, что через n шагов (испытаний) система перейдет из состояния i в состояние j . Очевидно, что $P_{ij}(1) = p_{ij}$. Пусть из первоначального состояния i система перейдет за m шагов в промежуточное состояние r с вероятностью $P_{ir}(m)$, после чего за оставшиеся $n - m$ шагов она перейдет в конечное состояние j с вероятностью $P_{rj}(n - m)$. Тогда по формуле полной вероятности получим

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^k P_{ir}(m) P_{rj}(n - m). \quad (3.44)$$

Эту формулу называют *равенством Маркова*.

Зная все переходные вероятности $\mathcal{P}_{ij}(1) = p_{ij}$, т.е. матрицу перехода (3.42), можно последовательно определить вероятности перехода в любое состояние. Сначала положим в равенстве (3.44) $n = 2$ и $m = 1$, затем $n = 3$ и $m = 2$ и т.д. В матричной форме это имеет вид:

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^2; \quad \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1^3; \quad \dots, \quad \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1^n. \quad (3.45)$$

Справедливо утверждение: для однородной марковской цепи имеет место следующая формула связи между начальным состоянием системы и ее состоянием на n -м шаге перехода из состояния в состояние ($n = 1, 2, \dots$):

$$(p_1(n), p_2(n), \dots, p_k(n)) = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_k(0)) \mathcal{P}_1^n, \quad (3.46)$$

т.е. вектор вероятностей состояний системы на n -м шаге равен произведению вектора нулевого состояния системы на n -ю степень матрицы перехода.

Цепи Маркова имеют применение в расчетах вероятностей состояния финансовых систем, систем обслуживания и т.д.

Пример 17. Пусть банк может находиться в одном из трех состояний по величине процентных ежеквартальных ставок: 3, 4 и 5% с заданной матрицей перехода

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Найти вероятность состояния банка по процентным ставкам через год, если в конце предшествующего года процентная ставка составляла 4%.

Решение. Начальное распределение вероятностей имеет вид:

$$(p_1(0), p_2(0), p_3(0)) = (0, 1, 0).$$

Вероятности состояний банка по истечении четырех кварталов определяются по формуле (3.46) при $k = 3$ и $n = 4$:

$$\begin{aligned} (p_1(4), p_2(4), p_3(4)) &= (p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mathcal{P}_1^4 = (0, 1, 0) \mathcal{P}_1^2 \mathcal{P}_1^2 = \\ &= (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix} = \\ &= (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0,2070 & 0,4040 & 0,3890 \\ 0,2020 & 0,4015 & 0,3965 \\ 0,1945 & 0,3965 & 0,4090 \end{pmatrix} = (0,2020, 0,4015, 0,3965). \end{aligned}$$

Таким образом, в конце года вероятности процентных ставок 3%, 4% и 5% составят соответственно около 0,2; 0,4 и 0,4. Следовательно, вероятнее всего процентная ставка к концу года останется такой же, какой она и была в конце предшествующего года, т.е. 4%.

Упражнения

3.1. Найти групповые средние совокупности, состоящие из двух групп:

1-я группа				2-я группа			
x_i	0,1	0,4	0,6	x_i	0,1	0,3	0,4
n_i	3	2	5	n_i	10	4	6

3.2. По условиям предыдущего упражнения найти общую среднюю.

3.3. Для распределения статистической совокупности

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

найти ее дисперсию.

3.4. Методом моментов и методом наибольшего правдоподобия найти точечную оценку неизвестного параметра p в биномиальном распределении по условиям выборки

x_i	0	1	2	3	4
n_i	5	2	1	1	1

3.5. Случайная величина X имеет распределение

$$P(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

В трех измерениях величина X приняла значения 0, 1 и 2. Оценить неизвестный параметр p методом моментов и методом наибольшего правдоподобия.

3.6. Для заданных среднего квадратического отклонения σ , выборочного среднего $\bar{x}_в$ и объема выборки n найти доверительные интервалы неизвестного математического ожидания с заданной надежностью p :

а) $\sigma = 2$, $\bar{x}_в = 5,4$, $n = 10$, $p = 0,95$;

б) $\sigma = 3$, $\bar{x}_в = 20,12$, $n = 25$, $p = 0,99$.

3.7. Выполнить упражнение 3.6 при условии, что среднее квадратическое отклонение σ неизвестно.

3.8. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения

x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6

3.9. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 2,1$ извлечена выборка объема $n = 49$ и по ней найдена средняя $\bar{x}_в = 4,5$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу $H_0: a = 3$ (равенство математического ожидания гипотетическому значению) при альтернативной гипотезе $H_1: a \neq 3$.

3.10. Для выборки объема $n = 16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, определены выборочная средняя $\bar{x}_в = 12,4$ и среднее квадратическое отклонение $s = 1,2$. При уровне значимости $0,05$ проверить нулевую гипотезу $H_0: a = 11,8$ при альтернативной гипотезе $H_1: a \neq 11,8$.

3.11. По 100 независимым испытаниям определена относительная частота $m/n = 0,15$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу $H_0: p = 0,17$ при альтернативной гипотезе $H_1: p \neq 0,17$.

Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Глава 4. РАСЧЕТЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИТУАЦИЙ

4.1. Графы, сети и их применение в экономике

4.1.1. Основные определения и характеристики граф

Пусть дано непустое множество X , состоящее из элементов, называемых точками ($x_1, x_2, \dots$), и на X задано множество отношений T , позволяющих установить соответствие между каждым элементом множества X и некоторым его подмножеством. Каждая пара точек x_i, x_j множества X , между которыми установлено отношение из множества T , называется *ребром*.

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество X и множество отношений T называются *графом*, который обозначается $G(X, T)$. Граф называется *конечным*, если множество X конечно.

С геометрической точки зрения граф $G(X, T)$ представляет собой непустое множество точек (вершин) и множество отрезков (ребер), концы которых принадлежат данному множеству точек. При изображении графов ребра могут быть прямолинейны или криволинейны, длины ребер и расположение вершин произвольны. На рис. 4.1, *а–в* изображен один и тот же граф.

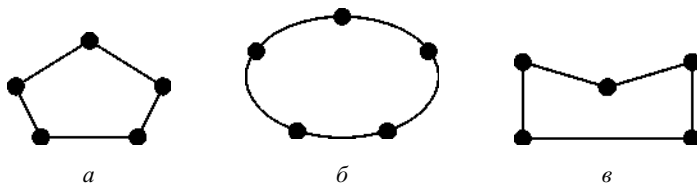


Рис. 4.1

Ребра графа обозначают парой вершин (x_1, x_2).

Вершины, не принадлежащие ни одному ребру графа, называются *изолированными*.

Рассмотрим граф (рис. 4.2). Вершины x_1, x_4, x_5 изолированные (они не принадлежат графу).

Граф может не иметь ребер. Тогда он состоит из изолированных точек.

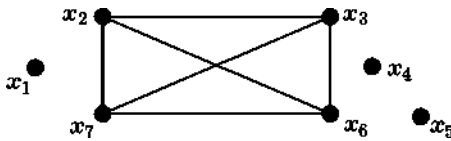


Рис. 4.2



Рис. 4.3

Граф, изображенный на рис. 4.3, состоит только из изолированных точек. Две вершины называются *смежными*, если они соединены ребром, два ребра *смежные*, если они имеют общую вершину.

Ребро и любая из его вершин называются *инцидентными*.

Ребро графа $G(X, T)$, у которого начальная и конечная вершины совпадают, называется *петлей*.

Рассмотрим граф (рис. 4.4). Ребро (x_3, x_3) является петлей.

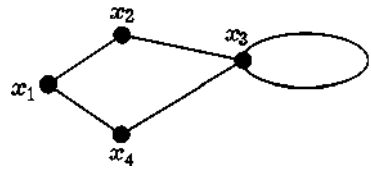


Рис. 4.4

Примерами графов могут служить схемы железных и автомобильных дорог, метрополитена, формулы молекул, генеалогические деревья и т.д.

Существуют различные способы задания конечного графа $G(X, T)$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — вершины графа, $l_1, l_2, \dots, l_m$ — ребра графа.

Определение 2. *Матрицей смежности* называется матрица $A_{m \times n}$, у которой элемент a_{ij} равен количеству ребер, соединяющих вершины x_i и x_j .

Определение 3. *Матрицей инцидентности* называется матрица $B_{n \times m}$, у которой элемент b_{ij} равен 1, если вершина x_i инцидентна ребру l_j , и равен 0 в противном случае.

Пример 1. Для графа на рис. 4.5 матрица смежности A и матрица инцидентности B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 6}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{6 \times 8},$$

Кроме того, графы можно задавать списками пар вершин, соединенных ребрами, или заданием для каждой вершины множества смежных вершин.

Граф $G(X, T)$ называется *полным*, если любые две вершины соединены одним и только одним ребром.

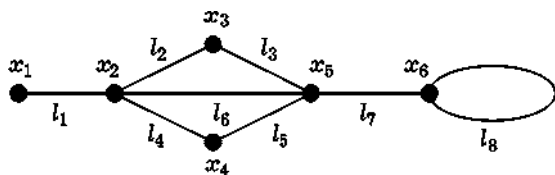


Рис. 4.5

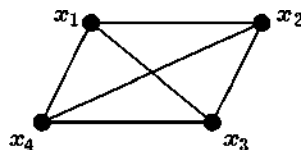


Рис. 4.6

Граф, изображенный на рис. 4.6, является полным.

В полном графе каждая вершина принадлежит одному и тому же числу ребер, так как она соединена со всеми остальными вершинами. Для задания полного графа достаточно знать число его вершин. Неполный граф можно преобразовать в полный с теми же вершинами, добавив недостающие ребра.

Дополнением графа $G(X, T)$ называется граф $\overline{G}(X, T)$ с теми же вершинами, что и граф $G(X, T)$, и теми ребрами, которые необходимо добавить к графу $G(X, T)$, чтобы получился полный граф.

Граф $G(X, T)$ (рис. 4.7, а) неполный. Полный граф (рис. 4.7, б) получается из графа $G(X, T)$ с помощью дополнения (рис. 4.7, в).

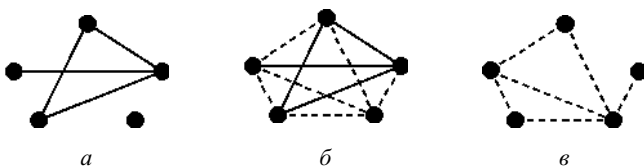


Рис. 4.7

Степенью вершины x_i графа $G(X, T)$ называется число d_i , равное количеству ребер графа, инцидентных этой вершине. Вершина называется *четной* (*нечетной*), если ее степень — четное (нечетное) число.

Теорема 4.1. Если конечный граф $G(X, T)$ (без петель) имеет n вершин и m ребер, то

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2m. \quad (4.1)$$

Доказательство. Рассмотрим полный граф (рис. 4.8).

Очевидно, что $d_1 = 3$, $d_2 = 2$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$. Сложим эти числа: $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 10$. В этой сумме каждое ребро участвует дважды: $10 : 2 = 5$.

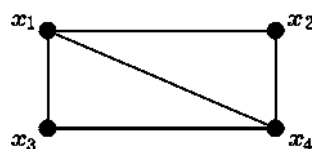


Рис. 4.8

Рассмотрим произвольный граф $G(X, T)$. Каждая вершина графа x_i инцидентна d_i ребрам. Если сложить эти величины по всем вершинам, то в полученной сумме каждое ребро будет участвовать дважды, т.е. эта сумма будет равна $2m$. ■

Теорема 4.2. Число нечетных вершин любого графа четно.

Доказательство. Так как левая часть равенства (4.1) является четным числом, нечетных вершин должно быть четное число. ■

Теорема 4.3. Во всяком графе с n вершинами ($n > 2$) всегда найдутся, по меньшей мере, две вершины с одинаковыми степенями.

Доказательство. Предположим противное — все вершины имеют разные степени: $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Но если в графе есть вершина степени 0, то не может быть вершины со степенью $n - 1$. Получено противоречие. ■

Теорема 4.4. Если в графе с n вершинами ($n > 2$) в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n - 1$. ■

Определение 4. *Путь* от x_i до x_j называется такая последовательность ребер графа, ведущая от x_i к x_j , в которой два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается дважды. *Длиной пути* называется число ребер этого пути.

Путь от x_i до x_j называется *простым*, если он не проходит через одну вершину более одного раза.

Пример 2. Рассмотрим граф (рис. 4.9).

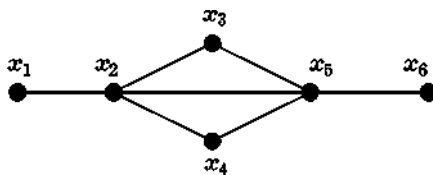


Рис. 4.9

В данном графе есть следующие пути от x_1 до x_6 :

x_1, x_2, x_5, x_6 — путь длиной 3;

x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 — путь длиной 4;

x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 — путь длиной 4;

$x_1, x_2, x_3, x_5, x_4, x_2, x_5, x_6$ — путь длиной 7.

Первые три пути являются простыми.

Циклом называется путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают; *длиной цикла* — число ребер в этом цикле.

Цикл называется *простым*, если он не проходит через одну вершину более одного раза.

Пример 3. Рассмотрим граф (рис. 4.10). В данном графе есть следующие циклы:

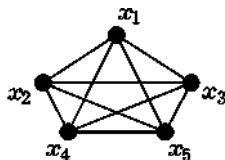


Рис. 4.10

циклы:
 x_1, x_5, x_4, x_1 — цикл длиной 3;
 x_1, x_2, x_3, x_1 — цикл длиной 3;
 $x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_1$ — цикл длиной 5;
 $x_1, x_2, x_4, x_5, x_2, x_3, x_1$ — цикл длиной 6;
 и т.д.

Первые три цикла являются простыми.

Теорема 4.5. Если у графа $G(X, T)$ все простые циклы четной длины, то граф не имеет ни одного цикла нечетной длины.

Доказательство. Предположим противное — в графе есть цикл нечетной длины. В таком цикле найдется вершина, которая повторяется дважды. В этой вершине разобьем цикл на два цикла, один из которых будет иметь четную длину, а другой — нечетную. Повторим процедуру с циклом нечетной длины. За конечное число шагов мы придем к простым циклам, причем один из них будет иметь нечетную длину. Получено противоречие с условием теоремы. ■

Две вершины графа называются *связными*, если в графе существует путь с концами в этих вершинах, и *несвязными* в противном случае.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины связны, и *несвязным* в противном случае.

Пример 4. В группе из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими. Вариантов такой группы может быть два: в первом (рис. 4.11, а) мы имеем связный граф, во втором (рис. 4.11, б) — несвязный.

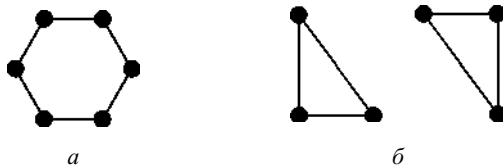


Рис. 4.11

Теорема 4.6. Связный граф $G(X, T)$ представляет собой простой цикл тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет степень 2.

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть граф $G(X, T)$ представляет собой простой цикл. Из любой его вершины можно попасть в любую другую, не проходя ни через какую вершину два раза. Очевидно, что степень любой вершины такого графа равна 2.

Теперь докажем достаточность. Пусть граф $G(X, T)$ связный и степень каждой его вершины равна 2. Любые две его вершины соединены путем.

Возьмем произвольную вершину. Пойдем по одному из двух ребер, к которым принадлежит эта вершина. Мы попадем в следующую вершину, из которой выходит два ребра. По одному мы пришли. Двигаемся далее по другому ребру. Таким образом, все вершины графа будут пройдены и мы вернемся в исходную вершину. Путь замкнется. Следовательно, этот граф является *циклом*. ■

Определение 5. Ребро (x_i, x_j) называется *мостом*, если в графе $G(X, T)$, полученном после удаления ребра (x_i, x_j) , вершины x_i и x_j несвязны.

Рассмотрим граф (рис. 4.12, а). В этом графе ребро (x_3, x_5) является мостом, поскольку в графе, полученном после удаления данного ребра (рис. 4.12, б), вершины x_3 и x_5 несвязны.

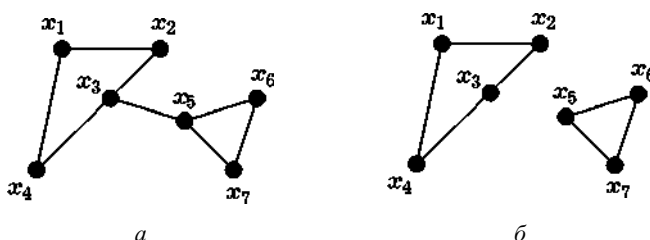


Рис. 4.12

Существует несколько признаков мостов:

ребро (x_i, x_j) является мостом тогда и только тогда, когда (x_i, x_j) является единственным путем, соединяющим вершины x_i и x_j ;

ребро (x_i, x_j) является мостом тогда и только тогда, когда найдутся две вершины x_k и x_m , такие, что любой путь, соединяющий их, содержит вершины x_i и x_j ;

ребро (x_i, x_j) является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

Связный граф без циклов называется *деревом*.

Вершина дерева, имеющая степень 1, называется *висячей*.

По аналогии с генеалогическими деревьями вводятся родовые понятия для вершин.

Рассмотрим граф (рис. 4.13).

В этом графе вершина x_1 называется *корневой*, а пути от нее — *ветвями*. Вершина x_2 называется *родительской* по отношению к вершинам x_4, x_5, x_6 и *прародительской* по отношению к вершинам x_8, x_9 . Вершины x_2 и x_3 называются *дочерними* по отношению к вершине x_1 .

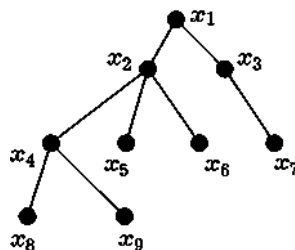


Рис. 4.13

Пример 5. Кубок по настольному теннису разыгрывают 16 команд по олимпийской системе. Схему турнира можно изобразить деревом (рис. 4.14).

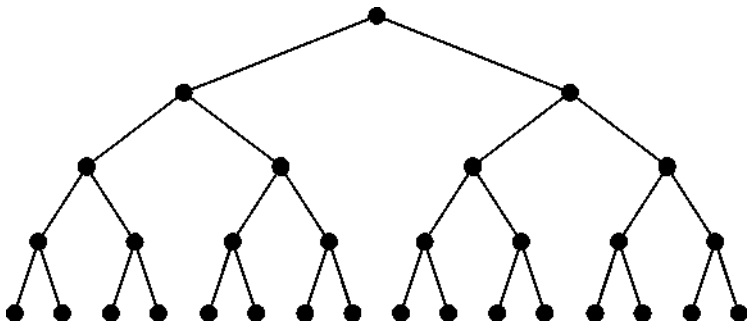


Рис. 4.14

Любое ребро в дереве является мостом. Для каждой пары вершин дерева существует единственный соединяющий их путь.

Теорема 4.7. Дерево с n вершинами имеет $n - 1$ ребро. ■

Как мы уже говорили, один и тот же граф может быть изображен по-разному. Для того чтобы узнать, совпадают ли графы, необходимо предварительно проверить следующие условия:

- одинаковое ли число вершин в графах;
- одинаковое ли число ребер в графах;
- одинаковое ли число вершин в графах имеют степень k .

Необходимым и достаточным условием совпадения графов является существование такого взаимно однозначного соответствия между ними, при котором две вершины в одном графе соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие вершины в другом графе.

4.1.2. Плоские графы

Определение 6. Граф $G(X, T)$ называется *плоским*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели других общих точек, кроме их общей вершины. Чертеж графа, на котором никакие два ребра не пересекаются, называют *плоским представлением графа*.

Примерами плоских графов могут служить простые циклы, деревья, лес и т.д.

Дан граф (рис. 4.15, а). Его плоским представлением является граф, изображенный на рис. 4.15, б.

Плоское представление имеет только плоский граф, и обратно: у всякого плоского графа всегда найдется плоское представление.

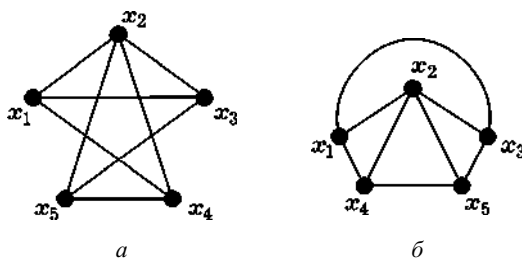


Рис. 4.15

В качестве примера неплоского графа можно привести полный граф с пятью вершинами (рис. 4.16).

Любые попытки начертить его плоское представление обречены на неудачу.

Гранью в плоском представлении графа $G(X, T)$ называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

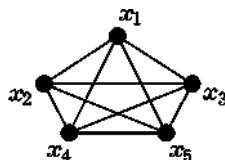


Рис. 4.16

Часть плоскости, расположенная вне плоского представления графа и ограниченная изнутри простым циклом, называется *бесконечной гранью*.

Две грани называются *соседними*, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

Граф, представленный на рис. 4.17, имеет четыре обычные грани, ограниченные циклами (x_1, x_2, x_6, x_1) , (x_5, x_6, x_7, x_5) , $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_2)$, $(x_2, x_5, x_7, x_6, x_2)$, и одну бесконечную грань, ограниченную циклом $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$. Грани (x_1, x_2, x_6, x_1) и $(x_2, x_5, x_7, x_6, x_2)$ соседние, а грани (x_1, x_2, x_6, x_1) и $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_2)$ соседними не являются. Часть плоскости, ограниченная простым циклом (x_2, x_5, x_6, x_2) , не признается гранью, так как содержит внутри себя цикл (x_5, x_6, x_7, x_5) .

В графе, показанном на рис. 4.18, часть плоскости, ограниченная простым циклом $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$, считается гранью, поскольку ребро (x_1, x_5) , расположенное внутри грани, не является циклом.

Рассмотрим граф (рис. 4.19).

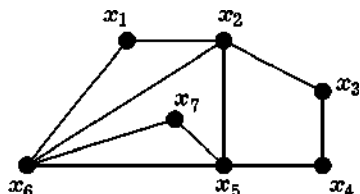


Рис. 4.17

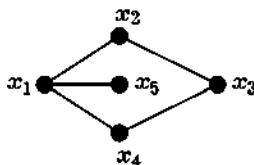


Рис. 4.18

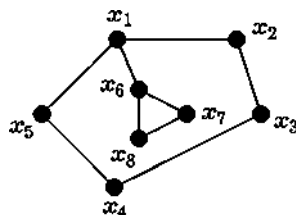


Рис. 4.19

Часть плоскости, заключенная между циклами $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$ и (x_6, x_7, x_8, x_6) , не является гранью, так как содержит внутри себя цикл и к тому же не ограничена циклом. Ребро (x_1, x_6) — мост, соединяющий два цикла.

Мост, соединяющий два цикла, называется *перегородкой*.

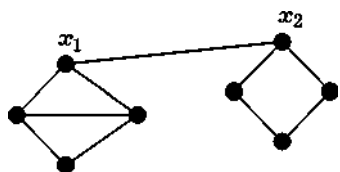


Рис. 4.20

Граф, изображенный на рис. 4.20, не имеет бесконечной грани, поскольку она не ограничена изнутри простым циклом. Мост (x_1, x_2) является перегородкой.

В плоском представлении дерева за грань принимают всю плоскость чертежа.

Для всякого плоского графа без перегородок число вершин n , число ребер m и число граней с учетом бесконечной g связаны соотношением $n - m + g = 2$, которое называется *формулой Эйлера*.

Операция добавления новых ребер, в результате которой в плоском представлении графа каждая грань имеет три вершины, называется *триангуляцией графа*.

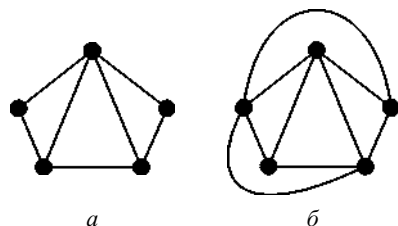


Рис. 4.21

Плоский граф $G(X, T)$ называется *максимально плоским*, или *триангулированным*, если к нему невозможно добавить ни одного ребра так, чтобы полученный граф был плоским.

Рассмотрим граф (рис. 4.21, а). Этот граф можно сделать максимально плоским (рис. 4.21, б). Каждая грань в плоском представлении максимально плоского графа имеет три вершины.

Теорема 4.8. Для любого плоского графа $G(X, T)$ существует плоское представление, в котором все ребра — прямолинейные отрезки. ■

Эйлеровым путем в графе называется путь, содержащий все ребра графа и проходящий через каждое по одному разу.

Рассмотрим граф (рис. 4.22). Он имеет эйлеров путь $(x_4, x_1, x_3, x_2, x_1, x_5, x_3)$.

Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все ребра графа и проходящий через каждое ребро по одному разу.

Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется *эйлеровым графом*.

Рассмотрим граф (рис. 4.23). Данный граф является эйлеровым, так как он имеет эйлеров цикл $(x_2, x_5, x_4, x_1, x_2, x_3, x_4, x_2)$.

Теорема 4.9. Эйлеров граф связный, и все его вершины четны.

Доказательство. Связность следует из определения эйлерового графа. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз. Следовательно,

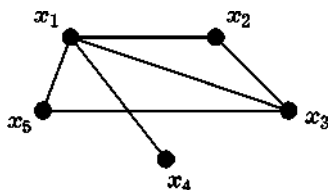


Рис. 4.22

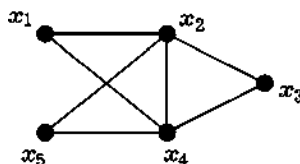


Рис. 4.23

степень каждой вершины графа должна состоять из двух одинаковых слагаемых: количества входов в вершину и количества выходов из нее. ■

Теорема 4.10. Если граф $G(X, T)$ связный и все его вершины четны, то он обладает эйлеровым циклом. ■

Теорема 4.11. Если граф $G(X, T)$ обладает эйлеровым путем с концами A и B , то граф $G(X, T)$ связный, а A и B его единственные нечетные вершины.

Доказательство. Если путь начинается в A и кончается в B , то A и B — нечетные вершины, даже если путь неоднократно проходил через них. В любую другую вершину путь должен привести и вывести из нее, т.е. остальные вершины четные. ■

Теорема 4.12. Если граф $G(X, T)$ связный и A и B его единственные нечетные вершины, то граф обладает эйлеровым путем с концами A и B . ■

Теорема 4.13. Если граф $G(X, T)$ связный, то можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра в точности два раза, по одному в каждом направлении. ■

Гамильтоновым путем в графе называется путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Например, граф на рис. 4.24 имеет гамильтоновы пути $(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2)$ и $(x_3, x_4, x_2, x_5, x_1)$.

Гамильтоновым циклом в графе называется цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется *гамильтоновым графом*.

Граф на рис. 4.25 является гамильтоновым, так как имеет гамильтоновы циклы $(x_1, x_7, x_6, x_3, x_4, x_5, x_2, x_1)$ и $(x_1, x_6, x_3, x_4, x_5, x_2, x_7, x_1)$.

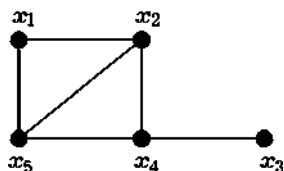


Рис. 4.24

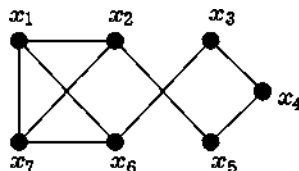


Рис. 4.25

Всякий полный граф является гамильтоновым, так как он содержит такой простой цикл, которому принадлежат все вершины графа.

Теорема 4.14. Граф с m вершинами имеет гамильтонов цикл, если любая его вершина A_i имеет степень не менее $m/2$. ■

4.1.3. Ориентированные графы

Ребро графа $G(X, T)$ называется *ориентированным*, или *дугой*, если одну вершину считают началом, а другую концом этого ребра.

На рисунке дугу изображают стрелкой. Дугу с началом в вершине x_i и концом в вершине x_j записывают (x_i, x_j) .

Определение 7. Граф, все ребра которого ориентированы, называется *ориентированным графом*.

Число дуг, исходящих из вершины ориентированного графа x_i , называется *полустепенью исхода* вершины x_i , число дуг, входящих в вершину x_i , — *полустепенью захода* вершины x_i .

Вершина x_i называется *источником*, если ее полустепень захода равна нулю, и *стоком*, если ее полустепень исхода равна нулю.

Рассмотрим ориентированный граф (рис. 4.26). Полустепень исхода вершины x_1 равна 1, полустепень захода этой вершины — 2, степень вершины x_1 равна 3. Вершина x_3 является источником, вершина x_2 — стоком.

Определение 8. Последовательность дуг $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k)$, в которой конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей, называется *маршрутом* от x_1 до x_k .

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется *замкнутым*.

Пример 6. Рассмотрим ориентированный граф (рис. 4.27). Он имеет множество маршрутов, например: $(x_1, x_2), (x_2, x_6), (x_6, x_7), (x_7, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_6), (x_6, x_5), (x_5, x_1)$. Этот маршрут является замкнутым.

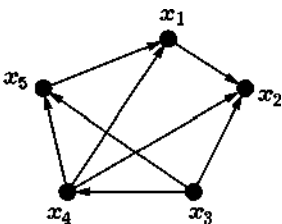


Рис. 4.26

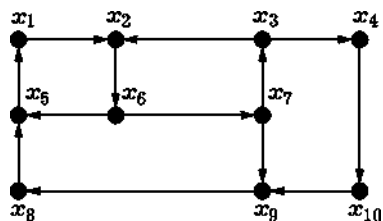


Рис. 4.27

Маршрут, в котором все вершины различны, называется *путем* от x_1 до x_k .

Если существует путь из вершины x_i в вершину x_j , то говорят, что x_j *достижима* из x_i .

Замкнутый путь называется *контуром*.

Рассмотрим ориентированный граф (рис. 4.28). Он имеет пути (x_4, x_1) , (x_1, x_2) , (x_2, x_3) и $(x_1, x_2); (x_2, x_4)$, (x_4, x_3) , а также один контур (x_4, x_1) , (x_1, x_2) , (x_2, x_4) . Вершина x_3 достижима из вершины x_1 .

Полным ориентированным графом называется граф $G(X, T)$, в котором каждая пара вершин соединена в точности одной дугой.

Ориентированный граф, изображенный на рис. 4.29, является полным.

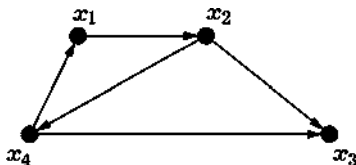


Рис. 4.28

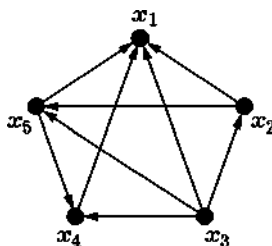


Рис. 4.29

Теорема 4.15. Всякий полный ориентированный граф имеет путь, проходящий через все вершины. ■

Ориентированный граф $G(X, T)$ можно задать с помощью матрицы инцидентности. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — вершины графа, $l_1, l_2, \dots, l_m$ — дуги графа.

Определение 9. *Матрицей инцидентности* графа $G(X, T)$ называется матрица $B_{n \times m}$, у которой элемент b_{ij} равен 1, если дуга l_j исходит из вершины x_i ; равен -1 , если дуга l_j входит в вершину x_i ; равен 0, если дуга l_j и вершина x_i не инцидентны.

Пример 7. Для ориентированного графа, изображенного на рис. 4.30, матрица инцидентности имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 5}.$$

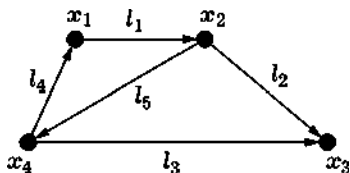


Рис. 4.30

4.1.4. Построение минимального остовного дерева сети

В экономических приложениях графы принято называть сетями, а их вершины — узлами. Каждому ребру (дуге) придают некоторое числовое значение, которое в зависимости от смысла задачи может обозначать расстояние, пропускную способность, время и т.д. С каждым видом сети связан определенный тип потоков (например, поток нефти в нефтепроводах, автомобильные потоки в сети городских дорог).

Определение 10. *Остовным деревом* сети называется дерево, содержащее все узлы сети.

Пример 8. Рассмотрим сеть с пятью узлами (рис. 4.31, а). Для данной сети можно построить множество остовных деревьев. Примеры таких остовных деревьев изображены на рис. 4.31, б–д.

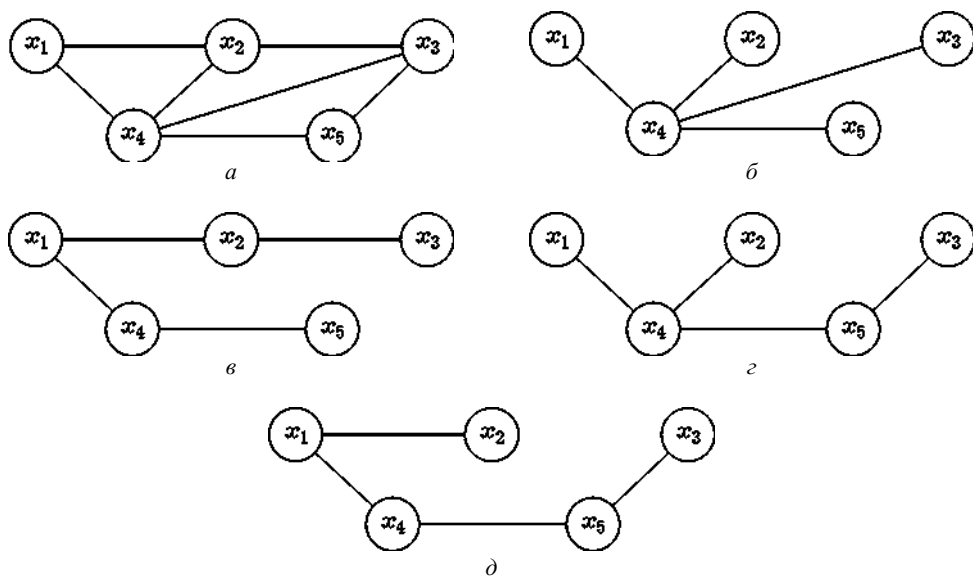


Рис. 4.31

При изучении сетей возникает задача построения минимального остовного дерева, т.е. задача соединения всех узлов сети с помощью путей наименьшей длины. Примером такой задачи является проектирование сети дорог между населенными пунктами, где дороги, соединяющие два пункта, могут проходить через другие населенные пункты. Наиболее экономичный проект должен минимизировать общую длину дорог.

Рассмотрим процедуру построения минимального остовного дерева. Введем обозначения:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество узлов сети;

C_k — связанное множество узлов сети, соединенных алгоритмом после выполнения k -й итерации;

$\overline{C}_k$ — множество узлов сети, не соединенных с узлами множества C_k после выполнения k -й итерации.

Минимальное остовное дерево сети строят по следующему алгоритму:

1) выбирают произвольный узел сети x_i : $C_1 = x_i$, $\overline{C}_1 = X \setminus \{x_i\}$;

2) выбирают из оставшихся узлов узел x_j , ближайший к множеству узлов C_1 : $C_2 = x_i, x_j$, $\overline{C}_2 = X \setminus \{x_i, x_j\}$;

3) выбирают из множества $\overline{C}_2$ узел, ближайший к узлам множества C_2 , включают его в множество C_2 и исключают из множества $\overline{C}_2$.

За конечное число шагов будут обработаны все узлы сети и построено минимальное остовное дерево: $C_n = X$, $\overline{C}_n = \emptyset$.

Пример 9. Телевизионная компания планирует подключение к кабельной сети пяти новых районов. Структура планируемой сети и расстояния между пунктами (в км) заданы на рис. 4.32, а. Требуется спланировать кабельную сеть с наименьшей длиной.

Проведем пошаговое построение минимального остовного дерева для данной сети. $C_0 = \emptyset$, $\overline{C}_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Начнем с узла x_1 .

Итерация 1 (рис. 4.32, б):

$$C_1 = \{x_1\}, \quad \overline{C}_1 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \quad \min(1, 5, 7, 9) = 1.$$

Ближайший узел к множеству C_1 — узел x_2 . Добавляем его к остовному дереву с ребром длиной 1 км.

Итерация 2 (рис. 4.32, в):

$$C_2 = \{x_1, x_2\}, \quad \overline{C}_2 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}, \quad \min(3, 4, 5, 6, 7, 9) = 3.$$

Ближайший узел к множеству C_2 — узел x_5 . Добавляем его к остовному дереву с ребром длиной 3 км.

Итерация 3 (рис. 4.32, г):

$$C_3 = \{x_1, x_2, x_5\}, \quad \overline{C}_3 = \{x_3, x_4, x_6\}, \quad \min(4, 5, 6, 7, 8) = 4.$$

Ближайший узел к множеству C_3 — узел x_4 . Добавляем его к остовному дереву с ребром длиной 4 км.

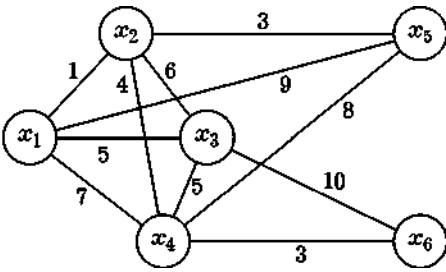
Итерация 4 (рис. 4.32, д):

$$C_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \quad \overline{C}_4 = \{x_3, x_6\}, \quad \min(3, 5, 6) = 3.$$

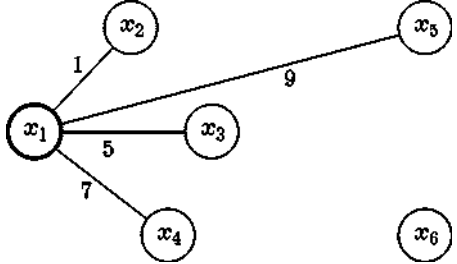
Ближайший узел к множеству C_4 — узел x_6 . Добавляем его к остовному дереву с ребром длиной 3 км.

Итерация 5 (рис. 4.32, е):

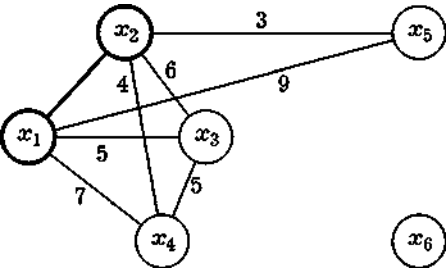
$$C_5 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}, \quad \overline{C}_5 = \{x_3\}, \quad \min(5, 6, 10) = 5.$$



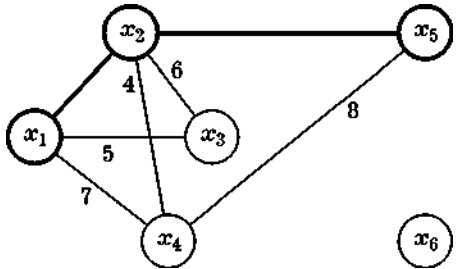
a



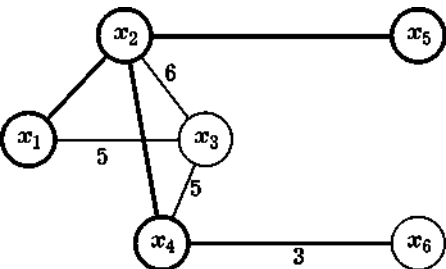
б



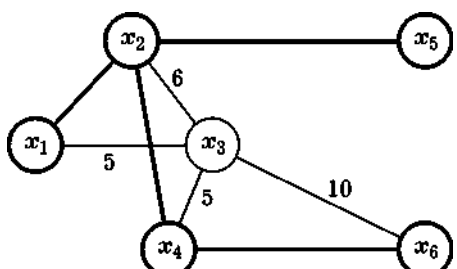
в



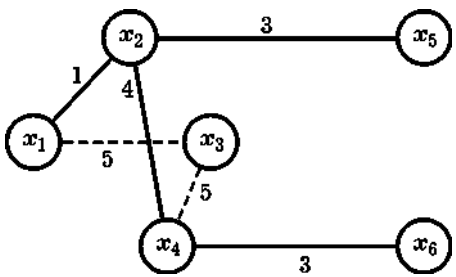
г



д



е



ж

Рис. 4.32

Ближайший узел к множеству C_5 — узел x_3 . Добавляем его к остовному дереву с ребром длиной 5 км. При этом возможно два альтернативных соединения (x_1, x_3) и (x_4, x_3) длиной 5 км. Процесс построения минимального остовного дерева завершен (рис. 4.32, жс).

Итак, $C_6 = X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\overline{C}_6 = \emptyset$. Минимальная длина телевизионного кабеля составит $1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$ км.

4.1.5. Задача нахождения кратчайшего пути

Данная задача состоит в определении в транспортной сети кратчайшего пути между заданными исходным пунктом и пунктом назначения. Такая модель может быть использована для описания различных экономических ситуаций.

Введем следующие обозначения:

x_1 — исходный узел;

x_n — узел назначения;

d_{ij} — расстояние на сети между смежными узлами x_i и x_j ;

U_j — кратчайшее расстояние от узла x_1 до узла x_j , $U_1 = 0$.

Алгоритм нахождения кратчайшего пути состоит в последовательном нахождении значений U_j для каждого узла: от исходного до узла назначения. Значение U_j для каждого узла рассчитывается по формуле

$$U_j = \min_i \{U_i + d_{ij}\},$$

где U_i — кратчайшее расстояние до предыдущего узла x_i ; d_{ij} — расстояние между текущим узлом x_j и предыдущим узлом x_i .

Процедура заканчивается, когда получено значение U_n для узла назначения.

Кратчайший маршрут от исходного узла до узла назначения определяется начиная с узла назначения путем прохождения узлов в обратном направлении по дугам, на которых реализовались минимальные значения расстояний на каждом шаге.

Пример 10. Определить кратчайшее расстояние между узлами x_1 и x_7 (рис. 4.33).

Найдем последовательно значения U_j для каждого узла от исходного узла до узла назначения:

$$U_1 = 0;$$

$$U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2;$$

$$U_3 = U_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4;$$

$$U_4 = \min \{U_1 + d_{14}, U_2 + d_{24}, U_3 + d_{34}\} = \min \{0 + 10, 2 + 11, 4 + 3\} = 7;$$

$$U_5 = \min \{U_2 + d_{25}, U_4 + d_{45}\} = \min \{2 + 5, 7 + 8\} = 7;$$

$$U_6 = \min \{U_3 + d_{36}, U_4 + d_{46}\} = \min \{4 + 1, 7 + 7\} = 5;$$

$$U_7 = \min \{U_5 + d_{57}, U_6 + d_{67}\} = \min \{7 + 6, 5 + 9\} = 13.$$

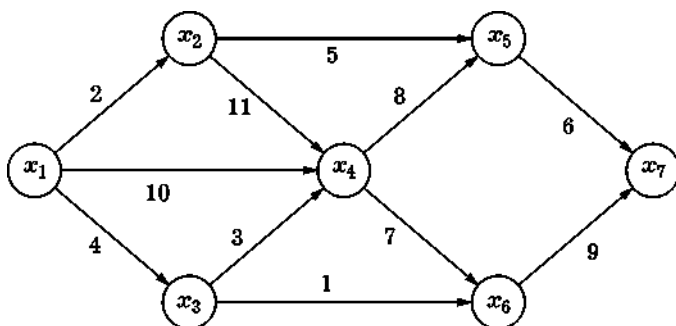


Рис. 4.33

Для определения кратчайшего расстояния между узлами x_1 и x_7 получена обратная последовательность узлов и дуг:

$$x_7 \rightarrow d_{57} \rightarrow x_5 \rightarrow d_{25} \rightarrow x_2 \rightarrow d_{12} \rightarrow x_1.$$

Минимальное расстояние между узлами x_1 и x_7 равно 13, а соответствующий маршрут — $\{x_1, x_2, x_5, x_7\}$.

В качестве примера определения кратчайшего расстояния рассмотрим задачу замены автомобильного парка.

Пример 11. Компания по прокату автомобилей планирует замену автомобильного парка на очередные пять лет. Автомобиль должен проработать не менее одного года, прежде чем компания поставит вопрос о его замене. На рис. 4.34 приведена стоимость замены автомобилей (в тыс. ден. ед.), зависящая от времени замены и числа лет, в течение которых автомобиль находился в эксплуатации. Определить план замены автомобилей, обеспечивающий минимальные расходы.

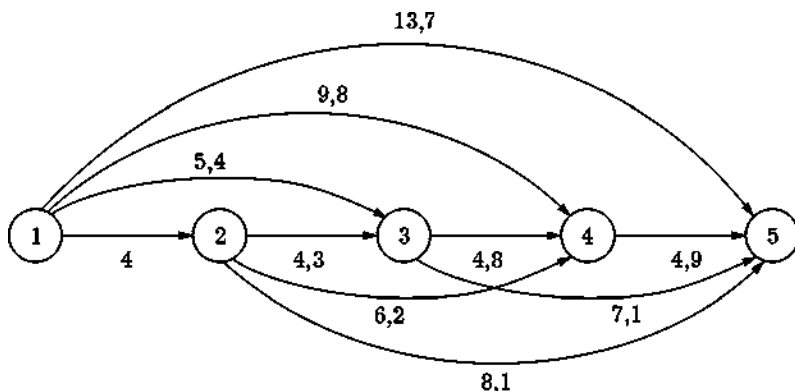


Рис. 4.34

Решение.

$$U_1 = 0;$$

$$U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4;$$

$$U_3 = \min \{U_1 + d_{13}, U_2 + d_{23}\} = \min \{0 + 5,4, 4 + 4,3\} = 5,4;$$

$$U_4 = \min \{U_1 + d_{14}, U_2 + d_{24}, U_3 + d_{34}\} = \\ = \min \{0 + 9,8, 4 + 6,2, 5,4 + 4,8\} = 9,8;$$

$$U_5 = \min \{U_1 + d_{15}, U_2 + d_{25}, U_3 + d_{35}, U_4 + d_{45}\} = \\ = \min \{0 + 13,7, 4 + 8,1, 5,4 + 7,1, 9,8 + 4,9\} = 12,1.$$

Таким образом, кратчайший путь 1 — 2 — 5, стоимость — 12,1 тыс. ден. ед. Это означает, что каждый автомобиль заменяется через два года, а через пять лет списывается.

4.1.6. Дерево решений

На практике одно решение, как правило, приводит к необходимости принятия следующего решения и т.д. Графически подобные процессы могут быть представлены с помощью дерева решений. Дерево представляет собой связный граф без циклов, имеющий ствол и ветви, и облегчает описание многоэтапного процесса принятия управленческого решения в целом. Такое дерево дает возможность рассмотреть различные ситуации, соотнести с ними финансовые результаты, скорректировать их в соответствии с приписанной им вероятностью, а затем сравнить альтернативы и выбрать наилучший вариант действий.

Составляя дерево решений, рисуют ствол и ветви, отображающие структуру проблемы. Располагают дерево решений слева направо. Ветви обозначают альтернативные решения, которые могут быть приняты, и вероятные исходы, возникающие в результате этих решений.

Квадратные узлы на дереве решений обозначают принимаемые решения, круглые узлы — исходы. Так как влиять на исходы не представляется возможным, в круглых узлах вычисляют вероятности этих исходов. Когда все решения и их исходы указаны на дереве, оценивается каждый из вариантов и проставляются денежные доходы. Все расходы, связанные с решениями, проставляются на соответствующих ветвях.

Рассмотрим задачу с применением дерева решений.

Пример 12. Компания может принять решение о строительстве среднего и малого предприятий. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии.

Строительство среднего предприятия экономически оправдано при высоком спросе. В то же время можно построить малое предприятие и через два года его расширить. Компания рассматривает данную задачу на десятилетний период.

Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны соответственно 0,7 и 0,3. Строительство среднего предприятия обойдется в 4 млн руб., малого — в 1 млн руб. Затраты на расширение малого предприятия через два года оцениваются в 3,5 млн руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,9 (0,2) млн руб.;
- малое предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,2 (0,1) млн руб.;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,8 (0,1) млн руб.

млн руб.

Определить оптимальную стратегию компании в отношении строительства предприятий.

Решение. Данная задача является многоэтапной, так как если компания решит строить малое предприятие, то через два года она может принять решение о его расширении. В этом случае процесс принятия решения состоит из двух этапов: решения в настоящий момент о размере предприятия и решения, принимаемого через два года, о необходимости его расширения.

Задача представлена в виде дерева решений (рис. 4.35). Предполагается, что спрос может оказаться высоким и низким. Дерево имеет два типа вершин: «решающие» вершины обозначены квадратами, а «случайные» — кругами.

В вершине 1, являющейся «решающей», необходимо выбрать размер предприятия. Вершины 2 и 3 являются «случайными». Компания будет рассматри-

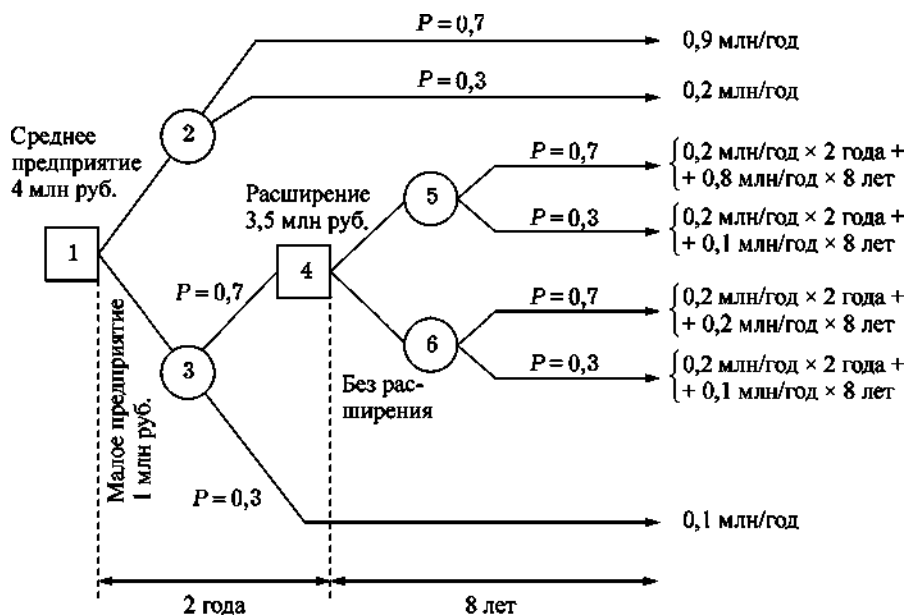


Рис. 4.35

вать вопрос о расширении малого предприятия только в том случае, если спрос по истечении первых двух лет установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о расширении или не расширении предприятия. Вершины 5 и 6 «случайные».

Проведем расчеты для каждой из альтернатив. Вычисления начнем со 2-го этапа. Для последних восьми лет альтернативы, относящиеся к вершине 4, оцениваются:

$$ДР = (0,8 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3) \cdot 8 - 3,5 = 1,22 \text{ (млн руб.)};$$

$$ДБР = (0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3) \cdot 8 = 1,36 \text{ (млн руб.)},$$

где ДР — доход в случае расширения предприятия; ДБР — доход без расширения предприятия.

Таким образом, в вершине 4 выгоднее не проводить расширение, тогда доход составит 1,36 млн руб.

Перейдем к вычислениям 1-го этапа, оставив для дальнейших расчетов одну «ветвь», выходящую из вершины 4, которой соответствует доход 1,36 млн руб. за последние восемь лет.

Для вершины 1:

$$ДС = (0,9 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3) \cdot 10 - 4,0 = 2,9 \text{ (млн руб.)};$$

$$ДМ = 1,36 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 2 + 0,1 \cdot 0,3 \cdot 10 - 1,0 = 0,94 \text{ (млн руб.)},$$

где ДС — доход среднего предприятия; ДМ — доход малого предприятия.

Сравнивая полученные в вершине 1 доходы среднего и малого предприятий, видим, что предпочтительно строительство среднего предприятия.

Оценим степень риска каждого решения по величине среднеквадратического отклонения:

$$\sigma_1 = \sqrt{(0,9 - 2,9)^2 \cdot 0,7 + (0,2 - 2,9)^2 \cdot 0,3} = 2,23 \text{ (млн руб.)};$$

$$\sigma_2 = \sqrt{(0,2 - 0,94)^2 \cdot 0,7 + (0,1 - 0,94)^2 \cdot 0,3} = 0,77 \text{ (млн руб.)}.$$

Рассматривая среднеквадратические отклонения, следует отметить, что строительство малого предприятия дает более гарантированный доход.

4.1.7. Сетевые графики

До появления сетевых методов работы и проекты планировались в небольших объемах. Наиболее известным методом такого планирования был ленточный график Ганта. Недостаток этого метода заключался в том, что он не позволял установить зависимости между различными работами.

Современное сетевое планирование начинается с разбиения программы на конкретные работы. Оценивается продолжительность работ и строится *сетевая модель* (график). Построение сетевой модели позволяет проанализировать все работы и внести улучшения в структуру модели до начала ее реализации.

Составляется *календарный график*, определяющий начало и окончание каждой работы, а также взаимосвязи с другими работами. Календарный график выявляет критические работы, которым нужно уделять особое внимание, чтобы закончить все работы в директивный срок. Для некритических работ календарный график позволяет установить резервы времени с целью эффективного использования трудовых и финансовых ресурсов.

Сетевая модель — графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящее из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех работ. В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа. *Сетевой график* — это ориентированный граф без контуров. В сетевом моделировании имеются два основных элемента: работа и событие.

Работа — это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный процесс (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата.

Фиктивная работа — это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие — это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Путь — это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Критический путь — это путь, не имеющий резервов и включающий в себя самые напряженные работы комплекса. Работы, расположенные на критическом пути, называются критическими. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки проведения таких работ, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

При построении сетевых моделей необходимо соблюдать следующие правила.

1. Сеть вычерчивается слева направо, и каждое событие с бóльшим порядковым номером изображается правее предыдущего. Стрелки, показывающие работы, также в основном должны быть направлены слева направо, при этом каждая стрелка должна выходить из узла с меньшим номером и входить в узел с бóльшим номером.

2. Два соседних события могут объединяться лишь одной работой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа (рис. 4.36, а).

3. В сети не должно быть тупиков, т.е. промежуточных событий, из которых не выходит ни одна работа (рис. 4.36, б).

4. В сети не должно быть промежуточных событий, которым не предшествует хотя бы одна работа (рис. 4.36, в).

5. В сети не должно быть замкнутых контуров, состоящих из взаимосвязанных работ, создающих замкнутую цепь (рис. 4.36, г).

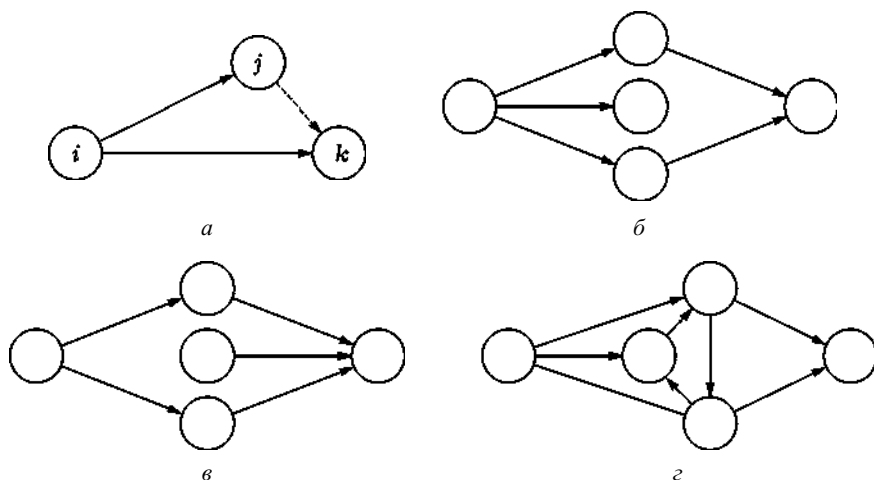


Рис. 4.36

Для правильной нумерации событий поступают следующим образом. Нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1 или 0. Из исходного события 1 вычеркивают все следующие за ним работы, на оставшейся сети находят событие, которому не предшествует ни одна работа. Это событие получает номер 2. Затем вычеркивают работы, следующие за событием 2, и на оставшейся части сети вновь находят событие, которому не предшествует ни одна работа, ему присваивают номер 3, и так продолжается до завершающего события. Пример нумерации сетевого графика показан на рис. 4.37.

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основе действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором — стохастическими (вероятностными).

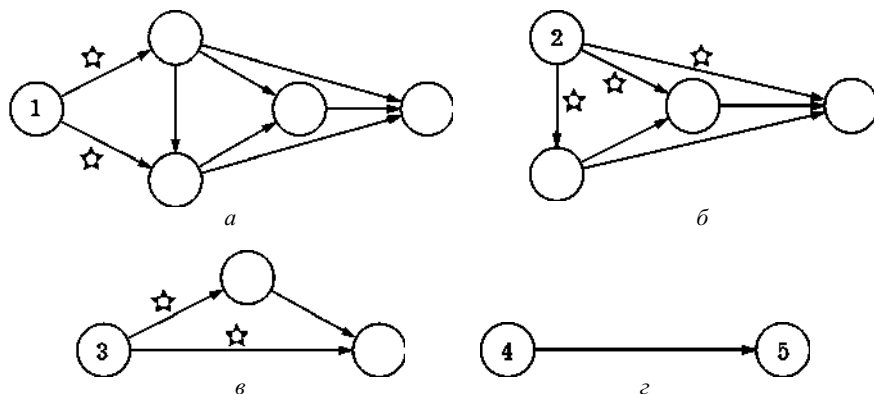


Рис. 4.37

Пример 13. Рассмотрим программу создания нового бытового прибора, пользующегося спросом у населения. Необходимые данные приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Работа	Описание работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы, недель
А, Б	Разработка технической документации (ТД) на прибор и его электронную часть	–	А = 3, Б = 2
В, Г	Разработка технологической документации на электронную часть прибора и прибор	А, Б	А = 2, Б = 2
Д	Передача ТД на прибор	А	3
Е	Изготовление приборов	В	7
Ж	Изготовление электронной части прибора	Г, Д	3
З, К	Разработка ТД на эксплуатацию прибора и электронную часть	В, Г	З = 5, К = 2
И	Сборка и испытания прибора	Е, Ж	6

На основе данных табл. 4.1 построим сетевой график создания прибора с учетом изложенных рекомендаций (рис. 4.38).

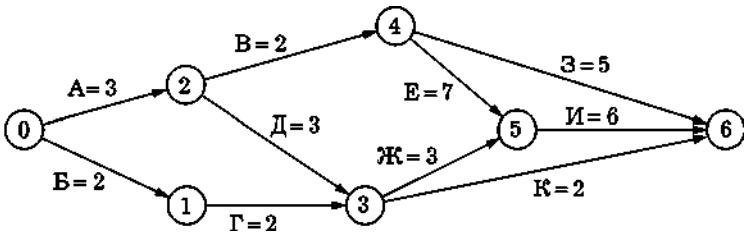


Рис. 4.38

Расчет временных параметров сетевого графика. Основным временным параметром сетевого графика является продолжительность критического пути. Расчет критического пути состоит из двух этапов:

1) прямой проход. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события вычисляется одно число, соответствующее раннему сроку наступления этого события;

2) обратный проход. Вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

Рассмотрим прямой проход.

Введем обозначения:

t_i^{PH} — ранний срок начала всех работ, следующих за событием i ;

t_j^{PH} — ранний срок начала всех работ, предшествующих событию j ;

t_{ij} — продолжительность работы (i, j) ;

$t_0^{\text{PH}} = 0$;

t_{ij}^{PO} — ранний срок окончания работы;

t_i^{PO} — поздний срок окончания всех работ, предшествующих событию i ;

t_{ij}^{PH} — поздний срок начала работ;

n — завершающее событие сети;

$t_j^{\text{PH}} = \max_i (t_i^{\text{PH}} + t_{ij})$ для всех (i, j) .

Пример 14. Воспользуемся данными примера 13. Определим ранние сроки начала всех работ:

$$\begin{aligned} t_1^{\text{PH}} &= t_0^{\text{PH}} + t_{01} = 0 + 2 = 2; & t_4^{\text{PH}} &= t_2^{\text{PH}} + t_{24} = 3 + 2 = 5; \\ t_2^{\text{PH}} &= t_0^{\text{PH}} + t_{02} = 0 + 3 = 3; & t_5^{\text{PH}} &= \max_{i=3,4} \{6 + 3, 5 + 7\} = 12; \\ t_3^{\text{PH}} &= \max_{i=1,2} \{2 + 2, 3 + 3\} = 4; & t_6^{\text{PH}} &= \max_{i=3,4,5} \{6 + 2, 12 + 6, 5 + 5\} = 18. \end{aligned}$$

Найдем ранние сроки окончания работ. Этот срок является наиболее ранним (минимальным) из возможных моментов окончания работы при заданной продолжительности работ, т.е. $t_{ij}^{\text{PO}} = t_i^{\text{PH}} + t_{ij}$. Поэтому

$$\begin{aligned} t_{01}^{\text{PO}} &= t_0^{\text{PH}} + t_{01} = 0 + 2 = 2; & t_{35}^{\text{PO}} &= t_3^{\text{PH}} + t_{35} = 6 + 3 = 9; \\ t_{02}^{\text{PO}} &= t_0^{\text{PH}} + t_{02} = 0 + 3 = 3; & t_{45}^{\text{PO}} &= t_4^{\text{PH}} + t_{45} = 5 + 7 = 12; \\ t_{13}^{\text{PO}} &= t_1^{\text{PH}} + t_{13} = 2 + 2 = 4; & t_{36}^{\text{PO}} &= t_3^{\text{PH}} + t_{36} = 6 + 2 = 8; \\ t_{23}^{\text{PO}} &= t_2^{\text{PH}} + t_{23} = 3 + 3 = 6; & t_{46}^{\text{PO}} &= t_4^{\text{PH}} + t_{46} = 5 + 5 = 10; \\ t_{24}^{\text{PO}} &= t_2^{\text{PH}} + t_{24} = 3 + 2 = 5; & t_{56}^{\text{PO}} &= t_5^{\text{PH}} + t_{56} = 12 + 6 = 18. \end{aligned}$$

Результаты расчетов занесем в таблицу (табл. 4.2).

Прямой проход закончился, начинаем обратный.

Если $i = n$, то $t_n^{\text{PO}} = t_n^{\text{PH}}$ и является отправной точкой обратного прохода. Значит, $t_i^{\text{PO}} = \min_j \{t_j^{\text{PO}} - t_{ij}\}$ для всех работ (i, j) и поэтому

$$\begin{aligned} t_6^{\text{PO}} &= t_6^{\text{PH}} = 18; & t_2^{\text{PO}} &= \min \{5 - 2, 9 - 3\} = 3; \\ t_5^{\text{PO}} &= t_6^{\text{PO}} - t_{56} = 18 - 6 = 12; & t_1^{\text{PO}} &= t_3^{\text{PO}} - t_{13} = 9 - 2 = 7; \\ t_4^{\text{PO}} &= \min \{18 - 5, 12 - 7\} = 5; & t_0^{\text{PO}} &= \min \{7 - 2, 3 - 3\} = 0. \\ t_3^{\text{PO}} &= \min \{18 - 2, 12 - 3\} = 9; \end{aligned}$$

Таблица 4.2

Работа (i, j)	Продол- житель- ность t_{ij}	Раннее		Позднее		Полный резерв r_{Π}	Свобод- ный ре- зерв $r_{\text{св}}$
		нача- ло t_j^{PH}	оконча- ние t_{ij}^{PO}	нача- ло t_{ij}^{PH}	оконча- ние t_j^{PO}		
1	2	3	4	5	6	7	8
(0, 1)	2	0	2	5	7	5	0
(0, 2)	3	0	3	0	3	0 ^K	0
(1, 3)	2	2	4	7	9	5	2
(2, 3)	3	3	6	6	9	3	0
(2, 4)	2	3	5	3	5	0 ^K	1
(3, 5)	3	6	9	9	12	3	4
(4, 5)	7	5	12	5	12	0 ^K	0
(3, 6)	2	6	8	16	18	10	11
(4, 6)	5	5	10	13	18	8	8
(5, 6)	6	12	18	12	18	0 ^K	0

Вычислим поздние сроки начала работ. Эти сроки являются наиболее поздними (максимальными) из допустимых моментов начала данной работы, при которых еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок, т.е. $t_{ij}^{\text{PH}} = t_j^{\text{PO}} - t_{ij}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 t_{01}^{\text{PH}} &= t_1^{\text{PO}} - t_{01} = 7 - 2 = 5; & t_{35}^{\text{PH}} &= t_5^{\text{PO}} - t_{35} = 12 - 3 = 9; \\
 t_{02}^{\text{PH}} &= t_2^{\text{PO}} - t_{02} = 3 - 3 = 0; & t_{45}^{\text{PH}} &= t_5^{\text{PO}} - t_{45} = 12 - 7 = 5; \\
 t_{13}^{\text{PH}} &= t_3^{\text{PO}} - t_{13} = 9 - 2 = 7; & t_{36}^{\text{PH}} &= t_6^{\text{PO}} - t_{36} = 18 - 2 = 16; \\
 t_{23}^{\text{PH}} &= t_3^{\text{PO}} - t_{23} = 9 - 3 = 6; & t_{46}^{\text{PH}} &= t_6^{\text{PO}} - t_{46} = 18 - 5 = 13; \\
 t_{24}^{\text{PH}} &= t_4^{\text{PO}} - t_{24} = 5 - 2 = 3; & t_{56}^{\text{PH}} &= t_6^{\text{PO}} - t_{56} = 18 - 6 = 12.
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов запишем в табл. 4.2.

Существует два вида резервов времени: полный резерв (r_{Π}) и свободный резерв ($r_{\text{св}}$).

Полный резерв времени показывает, на сколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ относительно критического пути, представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена работа, и ее продолжительностью, рассчитывается по формуле $r_{\Pi ij} = t_{ij}^{\text{PH}} - t_i^{\text{PH}}$. Результаты вычислений:

$$\begin{aligned}
 r_{\Pi 01} &= t_{01}^{\text{PH}} - t_0^{\text{PH}} = 5 - 0 = 5; & r_{\Pi 35} &= t_{35}^{\text{PH}} - t_3^{\text{PH}} = 9 - 6 = 3; \\
 r_{\Pi 02} &= t_{02}^{\text{PH}} - t_0^{\text{PH}} = 0 - 0 = 0; & r_{\Pi 45} &= t_{45}^{\text{PH}} - t_4^{\text{PH}} = 5 - 5 = 0; \\
 r_{\Pi 13} &= t_{13}^{\text{PH}} - t_1^{\text{PH}} = 7 - 2 = 5; & r_{\Pi 36} &= t_{36}^{\text{PH}} - t_3^{\text{PH}} = 16 - 6 = 10; \\
 r_{\Pi 23} &= t_{23}^{\text{PH}} - t_2^{\text{PH}} = 6 - 3 = 3; & r_{\Pi 46} &= t_{46}^{\text{PH}} - t_4^{\text{PH}} = 13 - 5 = 8; \\
 r_{\Pi 24} &= t_{24}^{\text{PH}} - t_2^{\text{PH}} = 3 - 3 = 0; & r_{\Pi 56} &= t_{56}^{\text{PH}} - t_5^{\text{PH}} = 12 - 12 = 0.
 \end{aligned}$$

Результаты расчета помещаем в табл. 4.2.

Свободный резерв времени — максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы, при условии, что все события наступают в ранние сроки: $r_{cbij} = t_j^{\text{PH}} - t_i^{\text{PH}} - t_{ij}$. Вычислим свободные резервы для всех работ:

$$\begin{aligned} r_{cb01} &= t_1^{\text{PH}} - t_0^{\text{PH}} - t_{01} = 2 - 0 - 2 = 0; & r_{cb35} &= t_5^{\text{PH}} - t_3^{\text{PH}} - t_{35} = 13 - 6 - 3 = 4; \\ r_{cb02} &= t_2^{\text{PH}} - t_0^{\text{PH}} - t_{02} = 3 - 0 - 3 = 0; & r_{cb45} &= t_5^{\text{PH}} - t_4^{\text{PH}} - t_{45} = 12 - 5 - 7 = 0; \\ r_{cb13} &= t_3^{\text{PH}} - t_1^{\text{PH}} - t_{13} = 6 - 2 - 2 = 2; & r_{cb36} &= t_6^{\text{PH}} - t_3^{\text{PH}} - t_{36} = 19 - 6 - 2 = 11; \\ r_{cb23} &= t_3^{\text{PH}} - t_2^{\text{PH}} - t_{23} = 6 - 3 - 3 = 0; & r_{cb46} &= t_6^{\text{PH}} - t_4^{\text{PH}} - t_{46} = 18 - 5 - 5 = 8; \\ r_{cb24} &= t_4^{\text{PH}} - t_2^{\text{PH}} - t_{24} = 6 - 3 - 2 = 1; & r_{cb56} &= t_6^{\text{PH}} - t_5^{\text{PH}} - t_{56} = 18 - 12 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических работ представлены в табл. 4.2. Следует отметить, что критические работы должны иметь нулевой полный резерв времени, при этом свободный резерв также должен быть равен нулю.

Используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить работы критического пути. Работа (i, j) принадлежит критическому пути, если для нее выполняются условия

$$t_i^{\text{PH}} = t_i^{\text{ПО}}, \quad t_j^{\text{PH}} = t_j^{\text{ПО}}, \quad t_j^{\text{PH}} - t_i^{\text{PH}} = t_j^{\text{ПО}} - t_i^{\text{ПО}} = t_{ij}.$$

В рассматриваемом примере критический путь включает в себя работы $(0, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$ с общим временем выполнения работ 18 недель.

При небольшом числе работ критические операции могут быть найдены перебором возможных путей. Так, для рассматриваемого случая:

путь $(0, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$ имеет продолжительность 10 недель;

$(0, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 6)$ — 15 недель;

$(0, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$ — 18 недель;

$(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 6)$ — 13 недель;

$(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 6)$ — 6 недель.

Наибольшим является путь 18 недель, содержащий работы $(0, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, которые являются критическими.

Учет стоимостных факторов при реализации сетевого графика. Стоимостные факторы при реализации сетевого графика учитываются путем определения зависимости «затраты — продолжительность» для каждой работы. При этом рассматриваются только прямые затраты, а косвенные, например административные или управленческие расходы, во внимание не принимаются.

На рис. 4.39 показана линейная зависимость стоимости работы от ее продолжительности. Точка $B(D_B, C_B)$, где D_B — продолжительность работы, а C_B —



Рис. 4.39

ее стоимость, соответствует нормальному режиму выполнения работы. Продолжительность работы можно уменьшить (сжать), увеличив интенсивность использования ресурсов, а значит, и стоимость работы. Однако существует предел, называемый минимальной продолжительностью работы (точка максимально интенсивного режима). Увеличение интенсивности использования ресурсов за этим пределом ведет лишь к росту затрат без сокращения продолжительности операции. Данный предел обозначен на рис. 4.39 точкой A с координатами (D_A, C_A) .

Линейная зависимость «затраты — продолжительность» принимается из соображений удобства, так как ее можно определить для любой работы по двум точкам нормального и максимально интенсивного режимов, т.е. по точкам A и B .

Использование нелинейной зависимости «затраты — продолжительность» существенно усложняет вычисления. Поэтому иногда нелинейную зависимость можно аппроксимировать кусочно-линейной: работа разбивается на части, каждая из которых соответствует одному линейному отрезку (рис. 4.40). Следует

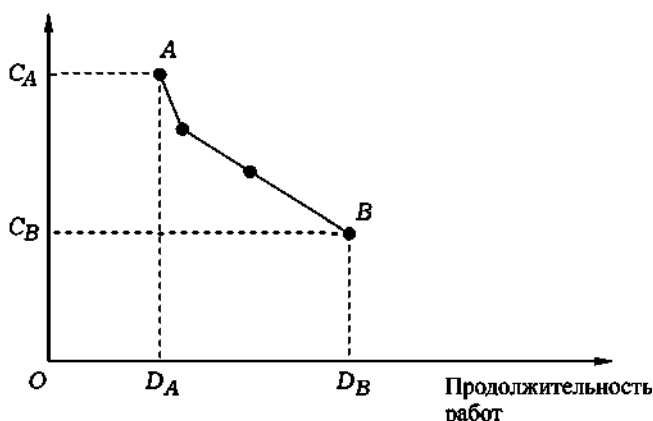


Рис. 4.40

отметить, что углы наклона этих отрезков к горизонтальной оси при переходе от точки нормального режима к точке максимально интенсивного режима возрастают. Если это условие не выполняется, то аппроксимация не имеет смысла.

Определив зависимость «затраты — продолжительность», для всех работ сети принимают нормальную продолжительность. Затем рассчитывают сумму затрат на все работы сети при данной продолжительности работ. На следующем этапе рассматривают возможность сокращения продолжительности работ. Этого можно достичь, сократив длительность какой-либо критической работы (анализу следует подвергать только критические работы).

Чтобы добиться сокращения продолжительности выполнения работ при минимально возможных затратах, необходимо в максимально допустимой степени уменьшить продолжительность той критической работы, которой соответствует отрезок с наименьшим углом наклона. В результате получают новый календарный график, возможно, с новым критическим путем. Новая стоимость работ будет выше прежней стоимости. На следующем этапе новый график подвергается изменению за счет уменьшения продолжительности следующей критической работы, которой соответствует отрезок с минимальным углом наклона, при условии, что продолжительность этой работы не достигла минимального значения. Подобная процедура повторяется, пока все критические работы не будут находиться в режиме максимальной интенсивности. Полученный таким образом оптимальный календарный график соответствует минимуму прямых затрат.

Пример 15. Постройте график работ и, уменьшая продолжительность работ, определите минимально возможный критический путь и стоимость работ до оптимизации и после нее. Необходимые исходные данные приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Работа	Нормальный режим		Оптимальный режим	
	Продолжительность, дней	Затраты, тыс. руб.	Продолжительность, дней	Затраты, тыс. руб.
(0, 1)	30	20	25	30
(1, 2)	60	40	45	60
(1, 3)	50	30	40	40
(1, 4)	30	25	20	35
(2, 4)	90	70	70	100
(3, 4)	80	60	65	70
(4, 5)	20	20	17	25
Итого	360	265	282	350

Решение. Составим график выполнения работ (рис. 4.41).

Перебором работ определим критический путь.

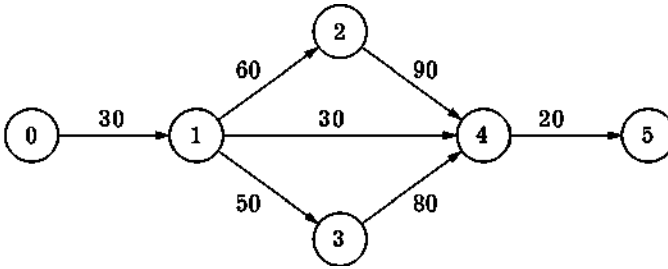


Рис. 4.41

По графику путь (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5) имеет продолжительность 200 дней; путь (0, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 5) — 180 дней; путь (0, 1), (1, 4), (4, 5) — 80 дней.

Таким образом, критическим путем графика является путь, на котором находятся работы (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5) продолжительностью 200 дней.

График выполнения работ может быть оптимизирован за счет достижения на некоторых работах максимально интенсивного режима работы.

Таблица 4.4

Работа	Относительный угол наклона
(0, 1)	2
(1, 2)	1,3
(1, 3)	1
(1, 4)	1
(2, 4)	1,5
(3, 4)	0,7
(4, 5)	1,7

Вычислим относительные углы наклона отрезков, соответствующих каждой работе.

Относительный угол наклона определяется как частное от деления прироста стоимости на уменьшение времени выполнения работ.

Результаты расчетов приведены в табл. 4.4. Учитывая относительные углы наклона кривой, проводим в первую очередь оптимизацию работ, имеющих наименьший угол наклона.

Путь (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5) может быть сжат до 157 дней, путь (0, 1), (1, 4), (4, 5) — до 62 дней, путь (0, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 5) — до 147 дней.

Дальнейшее сжатие путей (0, 1), (1, 4), (4, 5) и (0, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 5) нецелесообразно, так как стоимостные резервы пути (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5) исчерпаны полностью. Этот путь является критическим, и дальнейшее уменьшение критического пути не представляется возможным.

Таким образом, критический путь сокращен с 200 до 157 дней.

Получим сетевой график (рис. 4.42).

Ответ. Новый график имеет два критических пути: (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5) и (0, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 5).

Стоимость сжатия по отдельным видам работ:

(0, 1): 30 тыс. руб. — 20 тыс. руб. = 10 тыс. руб.;

(1, 2): 60 тыс. руб. — 40 тыс. руб. = 20 тыс. руб.;

(2, 4): 100 тыс. руб. — 70 тыс. руб. = 30 тыс. руб.;

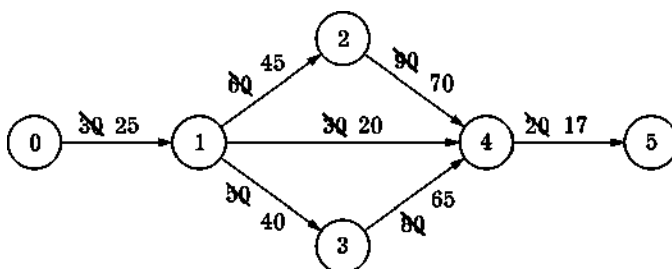


Рис. 4.42

(3, 4): 70 тыс. руб. – 60 тыс. руб. = 10 тыс. руб.;

(4, 5): 25 тыс. руб. – 20 тыс. руб. = 5 тыс. руб.

Общая стоимость сжатия составит: 10 тыс. руб. + 20 тыс. руб. + 30 тыс. руб. + 10 тыс. руб. + 5 тыс. руб. = 75 тыс. руб.

При нормальном режиме работ критический путь составляет 200 дней, стоимость работ — 265 тыс. руб.

Критический путь может быть уменьшен до 157 дней, при этом минимальная стоимость работ составляет 265 тыс. руб. + 75 тыс. руб. = 340 тыс. руб.

4.2. Основы управления рисками в экономике

4.2.1. Риски в экономике

Понятие риска. Любая сфера человеческой деятельности, в особенности экономика и бизнес, связана с принятием решений в условиях недостатка информации, который в свою очередь может быть обусловлен разнообразными причинами — как объективными, так и субъективными. Особенно распространены ситуации, когда решение выбирается в условиях риска: существует неопределенность в виде множества частных исходов результата принятия решения, причем вероятности наступления этих исходов либо определяемы тем или иным способом, либо неизвестны или не имеют смысла.

Под *риском* принято понимать угрозу потери лицом части своих ресурсов или появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной финансовой политики. Далее мы будем рассматривать риски, связанные с принятием финансовых решений, а также *инвестиционный риск*, обусловленный возможным обесцениванием инвестиционно-финансового портфеля, состоящего из собственных и приобретенных ценных бумаг.

Мера риска. Часто при выборе решения руководствуются лишь величиной ожидаемого выигрыша. Между тем при принятии каждого решения существует определенный риск.

В этом плане проблема соотношения между риском и прибылью является одной из ключевых в экономической деятельности и, в частности, в управлении финансами.

Поскольку результат принятия финансового решения, как правило, заранее неизвестен в силу неопределенности условий рынка даже в ближайшем будущем, этот результат можно рассматривать как случайную величину.

Определение 11. *Мерой риска* финансового решения будем считать среднее квадратическое отклонение σ основного показателя этого решения.

Поясним смысл введенного определения меры риска. Обычно деятельность в экономической сфере планируется по ряду априорных оценок, в том числе по средним показателям параметров, которые заранее неизвестны достоверно (например, прибыль) и могут меняться случайным образом. Для любого предпринимателя, в частности для лица, принимающего решение (ЛПР), крайне нежелательны резкие отклонения этих показателей от их среднего уровня, что означает угрозу утери контроля. Чем меньше стандартное отклонение от среднего значения, тем стабильнее рыночная обстановка и больше вероятность успешного осуществления запланированной деятельности в условиях рынка.

Вместе с тем достижение максимально возможной прибыли — также одна из основных целей предпринимателя, т.е. ЛПР решает две взаимно противоречащие задачи: получение максимального эффекта от деятельности на рынке при одновременной минимизации риска этой деятельности. Введем понятие функции полезности.

Определение 12. *Полезность* — это некоторое число, приписываемое ЛПР каждому возможному исходу.

В качестве полезности может выступать, например, сумма дохода или прибыли в каких-то единицах. У каждого ЛПР есть своя функция полезности, которая показывает его предпочтения тем или иным исходам в зависимости от его отношения к риску. Дж. Нейман и О. Моргенштерн* показали, что ЛПР при принятии решения будет стремиться к максимизации ожидаемой полезности. Мера склонности ЛПР к риску зависит, в частности, от его финансового положения, текущей ситуации принятия решения, т.е. эта характеристика не является неизменной.

Пусть каждое событие состоит из совокупности некоторых исходов с определенными вероятностями. Тогда ожидаемая полезность события представляет собой вероятностное среднее или математическое ожидание. Напомним, что для дискретной случайной величины X , принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, математическое ожидание и

*Джон фон Нейман (1903–1957) — американский математик. Оскар Моргенштерн (1902–1977) — американский экономист.

дисперсия (квадрат среднего квадратического отклонения) рассчитываются по формулам

$$M(X) = \bar{x} = \sum_{k=1}^n p_k x_k, \quad D(X) = M(X^2) - \bar{x}^2, \quad \sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (4.2)$$

На практике часто используют безразмерную величину риска $\sigma/\bar{x}$, измеряемую в процентах. При одинаковых или сравнимых по величине средних $\bar{x}$ обычно выбирают то решение, при котором σ меньше.

Пример 16. Инвестиционной компании предлагаются три проекта, имеющие разные степени риска, с заданными реализациями поступлений денежных средств (табл. 4.5).

Т а б л и ц а 4.5

	Проект 1			Проект 2			Проект 3		
Вероятность события	0,2	0,6	0,2	0,3	0,5	0,2	0,3	0,3	0,4
Сумма поступлений, млн руб.	40	50	60	50	60	80	50	70	100

Определить, какой проект следует выбрать (ответ обосновать).

Введем дополнительное условие: у инвестиционной компании имеется долг банку в размере 70 млн руб., для погашения которого требуются средства.

Решение. В качестве ожидаемой полезности будем рассматривать ожидаемые суммы поступлений. Сначала рассчитаем средние величины — соответствующие математические ожидания дискретных случайных величин:

$$\bar{x}_1 = 0,2 \cdot 40 + 0,6 \cdot 50 + 0,2 \cdot 60 = 50, \quad \bar{x}_2 = 61, \quad \bar{x}_3 = 76.$$

Затем по формулам (4.1) подсчитаем дисперсии и соответствующие средние квадратические отклонения, а также безразмерные риски. Получаем:

$$D(X_1) = 1600 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,6 + 3600 \cdot 0,2 - 2500 = 40, \quad \sigma(X_1) = 6,3, \quad \frac{\sigma}{\bar{x}} = 12,6\%;$$

$$D(X_2) = 109, \quad \sigma(X_2) = 10,4, \quad \frac{\sigma}{\bar{x}} = 17\%;$$

$$D(X_3) = 444, \quad \sigma(X_3) = 21, \quad \frac{\sigma}{\bar{x}} = 27,7\%.$$

Как видно из решения, первый проект обладает минимальным риском, однако ожидаемый доход тоже минимален по всем трем проектам — 50 млн руб. против 76 млн руб. в третьем проекте. С увеличением ожидаемого дохода риск растет, и в третьем проекте он более чем в два раза превышает риск первого проекта. Если инвестор тяготеет к осторожности, то он будет склоняться

к принятию первого проекта. Между тем на поведение инвестора часто оказывают воздействие конкретные финансовые обстоятельства. Так, при дополнительном условии инвестор, наверняка, будет всерьез рассматривать возможное участие во втором и третьем проектах. Иными словами, инвестор выбирает вариант в соответствии со своей функцией полезности.

Пример 17. Компания производит продукцию с ограниченным сроком годности и поставляет ее контейнерами. Затраты на производство и транспортировку одного контейнера составляют 25 тыс. долл. Компания продает каждый контейнер за 55 тыс. долл. Если в течение срока годности продукция не продается, то она портится и компания не получает доход. Вероятности спроса на продукцию в течение срока годности в количестве 5, 6, 7 и 8 контейнеров равны соответственно 0,1, 0,4, 0,3, 0,2. Определить, сколько контейнеров нужно производить в течение срока годности.

Решение. Прибыль от каждого проданного контейнера составляет 30 тыс. долл.; от каждого непроданного контейнера компания несет убыток 25 тыс. долл. Составим таблицу прибыли для всех случаев продажи (табл. 4.6); это аналогия платежной матрицы. В последних четырех колонках указаны средняя прибыль, среднее квадратическое отклонение и безразмерное стандартное отклонение как мера риска. Для расчетов числовых характеристик случайной величины X (прибыли от продажи продукции) используем формулы (4.1), где x_k — прибыль в каждом случае, p_k — соответствующая вероятность этой прибыли.

Таблица 4.6

Количество произведенных контейнеров	Спрос на контейнеры, тыс. долл.							
	5 $p=0,1$	6 $p=0,4$	7 $p=0,3$	8 $p=0,2$	$\bar{x}$	D	σ	$\frac{\sigma}{\bar{x}}$, %
5	150	150	150	150	150	0	0	0
6	125	180	180	180	174,5	272,3	16,5	9,5
7	100	155	210	210	177	1331	36,5	20,6
8	75	130	185	240	163	2541	50,4	30,9

Поясним расчет прибыли, например, в случае производства 8 контейнеров, а продажи только 6 из них. Доход от продажи 6 контейнеров составит 330 тыс. долл., а производство 8 контейнеров обойдется компании в 200 тыс. долл.; следовательно, прибыль составит 130 тыс. долл. Анализ полученных результатов показывает, что оптимальный выбор — производство 6 контейнеров: средняя ожидаемая прибыль составит 174,5 тыс. долл. при относительно невысоком стандартном отклонении (риск около 9,5%). При производстве 7 контейнеров $\bar{x}$ повышается незначительно, тогда как риск возрастает более чем в два раза.

Выбор стратегии компании зависит от функции полезности ЛПР, а значит, от его склонности к риску в конкретной рыночной ситуации и финансового

состояния компании на предстоящий период времени. Безрисковым является вариант выпуска 5 контейнеров с ожидаемой прибылью 150 тыс. долл. Однако в этом случае высока вероятность ($p = 0,9$) неудовлетворенного спроса, а если компания не удовлетворяет спрос на рынке, то почти обязательно на рынок придут конкуренты, и ситуация может измениться коренным образом (часть рынка сбыта отойдет к конкурентам, и тогда спрос может резко упасть). Иными словами, безрисковым вариант выпуска 5 контейнеров может оказаться только на коротком временном интервале.

Оптимальным с точки зрения соотношения «прибыль–риск» выглядит второй вариант — выпуск 6 контейнеров: прибыль возрастает (по сравнению с безрисковым вариантом) на 16,3% с относительно невысоким риском менее 10%. Однако абсолютно оптимальным этот вариант назвать нельзя. Если рыночная ситуация такова, что требует закрепления позиций компании, то нужны дополнительные затраты, и тогда следует выпускать 8 контейнеров даже с повышением риска более чем в два раза.

Проведенный анализ выбора вариантов количества выпуска продукции компании достаточно наглядно описывает формирование функции полезности ЛППР как его отношения к риску.

4.2.2. Оптимизация портфелей банка

Учет риска. Приведем традиционную формулировку задачи оптимального планирования системы портфелей банка, распространенную в отечественной литературе. Требуется найти неизвестные векторы активов и пассивов банка соответственно

$$\bar{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \quad \text{и} \quad \bar{L} = (L_1, L_2, \dots, L_m), \quad (4.3)$$

максимизирующие линейную форму прибыли системы портфелей:

$$\text{Prf}(\bar{A}, \bar{L}) = \sum_{k=1}^n A_k D_k - \sum_{i=1}^m L_i E_i \rightarrow \max, \quad (4.4)$$

где A_k — сумма инвестиций в отдельный тип активов в портфеле; D_k — доходность отдельного типа активов; k — индекс отдельного типа активов; n — число типов активов в портфеле; L_i — сумма привлечения по отдельному типу обязательств в портфеле пассивов; E_i — процентные расходы по привлечению отдельного типа ресурсов; i — индекс отдельного типа пассивов; m — число типов пассивов в портфеле.

Для формулировки задачи математического программирования необходимо к целевой функции (4.4) добавить условия (ограничения) на компоненты

векторов (4.3), которые формируют *допустимое множество*. Эти ограничения объединяются в две группы.

К первой группе относятся экономические нормативы Банка России: норматив достаточности капитала; нормативы ликвидности (текущей, мгновенной и долгосрочной); минимально допустимое значение ликвидных и суммарных активов кредитной организации; максимальный размер привлеченных денежных вкладов населения; норматив использования собственных средств кредитных организаций для приобретения долей (акций) других юридических лиц; норматив риска собственных вексельных обязательств.

Ко второй группе относятся собственные и технологические ограничения банка.

Хотя целевая функция (4.4) является линейной, ограничения экономических нормативов Банка России нелинейны из-за операций деления показателей. Отметим, что в число нормативов Банка России входят и показатели рисков, связанных с кредитованием, однако в формальные ограничения допустимого множества они не включаются.

В рамках сформулированной задачи можно для упрощения выделить задачу управления только активами банка. Суть такого управления заключается в том, что нужно максимизировать целевую функцию

$$M_A = p \cdot f_M(r_M, r_A, r_B, \dots, \bar{W}) \rightarrow \max \text{ дохода}, \quad (4.5)$$

где M_A — стоимость активов банка; p — абсолютный уровень цен; r_M — ставка доходности денег; r_A — ставка доходности актива A ; r_B — ставка доходности актива B и т.д.; $\bar{W}$ — норма доходности от стоимости труднореализуемых активов банка (недвижимость, драгоценные металлы, антиквариат и т.п.). Активы $A, B, \dots$ — это ликвидные ценные бумаги (облигации, акции, векселя и т.д.).

Структура портфеля активов должна строиться таким образом, чтобы получить максимально возможную прибыль в конкретной ситуации на финансовом рынке. Эта конкретная ситуация определяет допустимое множество (на котором ищется максимум целевой функции дохода) в виде ограничений на комбинации переменных, входящих в формулу (4.4): балансовое, ликвидное и кредитное ограничения. В принципе, управление активами банка можно свести к традиционной задаче линейного программирования в случае линейности целевой функции (4.4) и формы ограничений. Однако при формировании портфеля активов необходимо решить еще одну задачу, имеющую противоположную цель — минимизация риска, т.е. на допустимом множестве ищется такое решение, чтобы помимо цели (4.5) целевая функция удовлетворяла условию

$$M_A = p \cdot f_M(r_M, r_A, r_B, \dots, \bar{W}) \rightarrow \min \text{ риска}, \quad (4.6)$$

В приведенной постановке задачи оптимизации полагается, что риск фактически уже заложен в доходностях D_i и ставках доходностей r_A и r_B , входящих соответственно в целевые функции (4.5) и (4.6). Кроме того, полагается, что описанные ограничения, формирующие допустимое множество (прежде всего это ограничения Банка России), гарантируют минимум риска.

Классический портфельный анализ. Начало *портфельного анализа* было положено в работах Г. Марковица* в 1952 г. Он впервые предложил модель формирования оптимального портфеля и методы построения таких портфелей.

Ценные бумаги различных видов отличаются по доходности и степени надежности, и поэтому инвесторы вкладывают средства в ценные бумаги нескольких видов, стремясь достичь наилучшего соотношения риск–доходность. Принимая решение о приобретении набора ценных бумаг, инвестор должен иметь в виду, что доходность портфеля в предстоящий период владения неизвестна. Однако можно оценить предполагаемую доходность различных ценных бумаг исходя из некоторых предположений. Уровень доходности — случайная величина, основными характеристиками которой являются ожидаемое (или среднее значение) и стандартное отклонение. Именно последнюю характеристику предлагается использовать как меру риска. Инвестор максимизирует ожидаемую доходность и минимизирует риск, т.е. неопределенность. Подход Г. Марковица к принятию решения дает возможность адекватно учесть обе цели.

В методе, применяемом для выбора наиболее желательного портфеля, используются кривые безразличия. Иными словами, для инвестора существует функция полезности, зависящая от двух аргументов — ожидаемой доходности портфеля r_p и стандартного отклонения как меры риска σ_p :

$$u = u(r_p, \sigma_p). \quad (4.7)$$

Все портфели, лежащие на одной линии безразличия, или линии уровня функции (4.7)

$$u(r_p, \sigma_p) = I \quad (4.8)$$

для инвестора равноценны. Линии безразличия отражают отношение инвестора к риску и доходности портфеля и представляют собой кривые в координатах σ_p — r_p (рис. 4.43). Инвестор считает, что любой портфель, лежащий на той линии безразличия, которая выше и левее, более привлекателен, чем любой портфель, лежащий на той линии безразличия, которая ниже и правее. Ожидаемая доходность портфеля, состоящего из n ценных бумаг, равна

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i, \quad (4.9)$$

*Гарри Марковиц (р. 1927) — американский экономист.

где x_i — доля начальной стоимости портфеля, инвестированная в i -й вид ценных бумаг, r_i — ожидаемая доходность i -го вида ценных бумаг, n — количество видов ценных бумаг в портфеле.

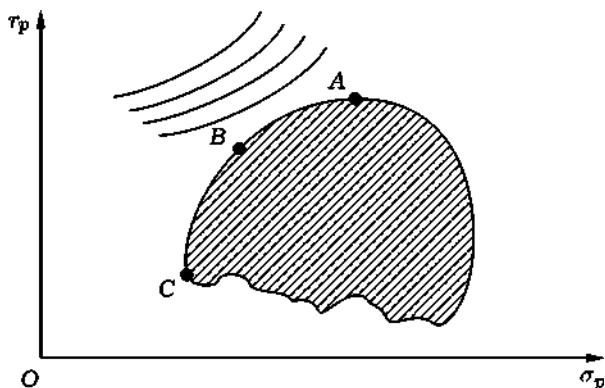


Рис. 4.43

Стандартное отклонение портфеля $\sigma(r_p)$ вычисляется следующим образом. Дисперсия доходности портфеля — это дисперсия суммы случайных величин; как известно из теории математической статистики, эта величина равна ковариации:

$$D(r_p) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i r_i, \sum_{j=1}^n x_j r_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{Cov}(r_i, r_j), \quad (4.10)$$

где $\text{Cov}(r_i, r_j)$ — ковариация ожидаемых доходностей i -й и j -й ценных бумаг, вычисляемая по формуле

$$\text{Cov}(r_i, r_j) = \mu_{ij} \sqrt{D(r_i)D(r_j)} = \mu_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.11)$$

где μ_{ij} — коэффициент корреляции между доходностями i -й и j -й ценных бумаг; D и σ — соответственно дисперсия и стандартное (среднее квадратическое отклонение) доходностей ценных бумаг. Как известно, $-1 \leq \mu_{ij} \leq 1$.

Формула для стандартного отклонения портфеля имеет вид

$$\sigma(r_p) = \sqrt{D(r_p)}. \quad (4.12)$$

Диверсификация портфеля. Рассмотрим пример.

Пример 18. Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности портфеля, состоящего из 40% акций компании A и 60% акций компании B , если доходности акций этих компаний некоррелированы и равны соответственно 20 и 10%, а стандартные отклонения — 10 и 5%.

Решение. По формуле (4.8) получаем: $r_p = 0,4 \cdot 20\% + 0,6 \cdot 10\% = 14\%$. Поскольку доходности бумаг некоррелированы, $\mu_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и тогда из формулы (4.10) следует $\sigma(r_p) = \sqrt{0,16 \cdot 100 + 0,36 \cdot 25} = 5\%$.

Приведенный пример показывает, что риск портфеля ценных бумаг не превосходит отдельных рисков составляющих его бумаг. Это свойство портфеля называется *диверсификацией* (от англ. diverse, что означает разнообразный): увеличение количества видов ценных бумаг при одновременном сокращении их долей в общей ожидаемой доходности уменьшает риск портфеля. Проиллюстрируем это еще на одном примере.

Пример 19. Найти ожидаемую доходность и ее стандартное отклонение для портфеля, состоящего из 10 пакетов ценных бумаг с некоррелированными доходностями. Доли пакета ценных бумаг x_i в портфеле, их доходности r_i и стандартные отклонения σ_i приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Параметры, %	Номер пакета ценных бумаг									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	10	10	10	10	10	10	20	10	5	5
r_i	15	15	18	14	25	20	10	28	35	40
σ_i	8	8	10	8	12	11	5	15	20	25

Решение. Вычисляем ожидаемую доходность портфеля:

$$r_p = 0,1 \cdot 15 + 0,1 \cdot 15 + 0,1 \cdot 18 + 0,1 \cdot 14 + 0,1 \cdot 25 + \\ + 0,1 \cdot 20 + 0,2 \cdot 10 + 0,1 \cdot 28 + 0,05 \cdot 35 + 0,05 \cdot 40 = 19,25\%.$$

Так как случайные величины доходностей бумаг являются независимыми, дисперсия доходности портфеля равна:

$$D(r_p) = 0,01 \cdot 64 + 0,01 \cdot 64 + 0,01 \cdot 100 + 0,01 \cdot 64 + 0,01 \cdot 144 + \\ + 0,01 \cdot 121 + 0,04 \cdot 25 + 0,01 \cdot 225 + 0,0025 \cdot 400 + 0,0025 \cdot 625 = 11,38.$$

Тогда $\sigma(r_p) = \sqrt{D(r_p)} = 3,37\%$. Отсюда видно, что стандартное отклонение доходности портфеля оказалось ниже минимального значения для пакетов ценных бумаг с номерами 1 и 2, а максимальные значения стандартных отклонений пакетов ценных бумаг с номерами 9 и 10 стали незаметны в общей величине $\sigma(r_p)$.

Достижимое и эффективное множества. На рис. 4.43 показано *достижимое множество*, представляющее собой все портфели, которые можно сформировать из n видов ценных бумаг. Множество портфелей, обеспечива-

ющих минимальный риск при меняющемся уровне ожидаемой доходности, находится на левой части границы достижимого множества, расположенной между точками A и C (касательная к кривой AC в точке A параллельна оси $O\sigma_p$, касательная в точке C параллельна оси $O\tau_p$). Справедлива теорема об *эффективном множестве портфелей*: инвестор выбирает свой оптимальный портфель из такого множества портфелей, каждый из которых:

- 1) максимизирует ожидаемую доходность для некоторого уровня риска;
- 2) минимизирует риск для некоторого уровня ожидаемой доходности.

Согласно этой теореме инвестора удовлетворяют только портфели, находящиеся на верхней и левой границе достижимого множества, т.е. эффективное множество портфелей представляет собой участок границы AB . На этом множестве инвестор будет выбирать свой оптимальный портфель.

Выбор оптимального портфеля. Для выбора оптимального портфеля инвестор должен совместить свои линии безразличия с эффективным множеством (рис. 4.44). Оптимальный портфель будет соответствовать точке, в которой кривая безразличия касается эффективного множества, — портфель O^* на кривой безразличия I_2 .

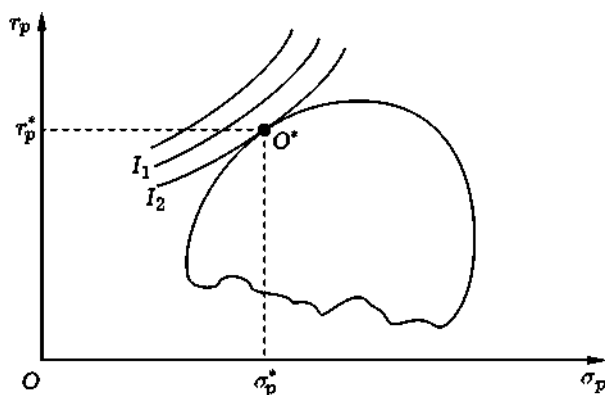


Рис. 4.44

Понятно, что оптимальный портфель O^* существенно зависит от формы линий безразличия (4.8), которые в свою очередь зависят от функции полезности (4.7), являющейся характеристикой стратегии инвестора. Если инвестор осторожен и тяготеет к уменьшению риска за счет снижения ожидаемой доходности портфеля, то линии безразличия являются менее выпуклыми вниз (семейство линий C на рис. 4.45). Повышение риска инвестора для достижения более высокого уровня ожидаемой доходности выражается в том, что выпуклость вниз линий безразличия увеличивается (семейство линий R). Эта трактовка соответствует понятию функции полезности Неймана — Моргенштерна, используемой для оценки действий инвестора.

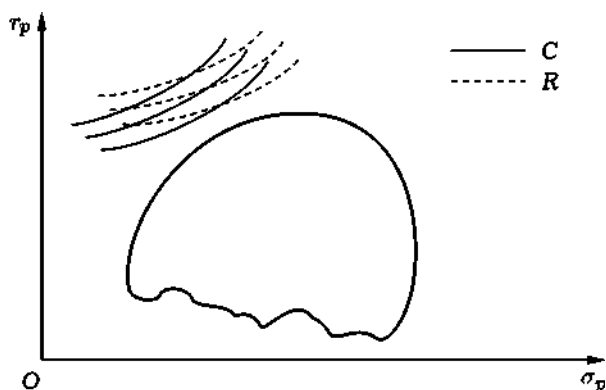


Рис. 4.45

Проанализируем наиболее вероятные действия инвесторов по формированию оптимальных портфелей. Для инвесторов с относительно невысокими объемами средств характерен выбор более рискованных портфелей, поскольку для укрепления своих позиций на рынке ценных бумаг они крайне нуждаются в увеличении вкладываемого капитала. Следовательно, их оптимальные портфели сосредоточены в основном вблизи точки *A* эффективного множества портфелей. Крупные инвесторы имеют портфели с высокой степенью диверсификации с ожидаемыми высокими в абсолютном выражении доходами. Поэтому, как правило, их оптимальные портфели сосредоточены вблизи точки *B* эффективного множества (хорошо известно, что на рынке ценных бумаг крупные участники чувствуют себя особенно уверенно). Интересы инвесторов среднего класса лежат в основном в средней части линии *AB*.

4.3. Теория массового обслуживания в экономике

Теория массового обслуживания (СМО) начала развиваться в начале XX столетия. Иоханнсен^{*} в 1907 г. сформулировал основные предпосылки новой теории. В 1909 г. Эрланг^{**} применил теорию вероятностей к исследованию зависимости обслуживания телефонных вызовов от числа поступающих на телефонную станцию вызовов. В СССР известный математик А.Я. Хинчин^{***} систематизировал основные положения теории СМО в монографии «Работы по математической теории массового обслуживания» (М.: Физматгиз, 1963). Теория массового обслуживания известна за рубежом под названием «теория очередей».

^{*} См.: Четыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике. — М.: Статистика, 1971.

^{**} Эрланг Агнер Краруп (1878–1929) — датский математик.

^{***} Хинчин Александр Яковлевич (1894–1959) — советский математик.

В последние годы теория массового обслуживания стала особенно актуальна в экономике в связи с использованием ряда ее аспектов в финансово-экономической сфере (банками различных типов, страховыми организациями, налоговыми инспекциями, аудиторскими службами). Теория СМО широко применяется также в сфере обслуживания (в различных системах связи, погрузочно-разгрузочных комплексах, автозаправочных станциях, магазинах, билетных кассах, ремонтных предприятиях, больницах и т.д.) и в современных высоких технологиях (компьютерных сетях, базах данных, поточных линиях, военных системах ПВО и ПРО).

4.3.1. Марковские процессы и потоки событий

В качестве аппарата теории систем массового обслуживания используют понятия теории случайных величин, а также теории случайных процессов.

Случайные процессы

Определение 13. *Случайным процессом, или случайной функцией $S(t)$, называется функция, которая каждому моменту времени t из некоторого временного промежутка ставит в соответствие единственную случайную величину $S(t)$.*

Случайная функция характеризует изменение случайной величины во времени. Введем понятие системы: *системой* называется целостное множество взаимосвязанных элементов, которое нельзя разделить на независимые подмножества. Элементы и связи в системе меняются во времени и характеризуют в каждый момент времени t состояние $S(t)$ системы.

Определение 14. Если состояния системы S изменяются во времени случайным образом, то будем говорить, что в системе S протекает *случайный процесс*.

По множеству состояний системы S протекающий в ней случайный процесс может быть *дискретным* или *непрерывным*. В дальнейшем мы будем иметь дело с дискретными случайными процессами. Тогда система переходит от состояния к состоянию скачком (в непрерывных процессах состояния системы меняются постепенно и плавно). Будем полагать, что в каждый момент времени система может находиться только в одном из своих состояний.

Определение 15. Случайный процесс, протекающий в системе S , называется *марковским**, если обладает свойством *отсутствия последействия*, или *отсутствия памяти*, т.е. для любого фиксированного момента времени t_0 вероятность состояния в будущем (при $t > t_0$) зависит только от состояния

*Марков Андрей Андреевич (1856–1922) — известный русский математик.

системы в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, как развивался этот процесс в прошлом (при $t < t_0$).

В финансово-экономической сфере такими случайными процессами можно считать, например, процессы динамики биржевой стоимости ценных бумаг, обслуживания клиентов в банках.

Потоки событий

Определение 16. *Потоком* называется последовательность событий, наступающих одно за другим, в общем случае, в случайные моменты времени. Среднее число событий в потоке за единицу времени называется *интенсивностью*, или *средней плотностью потока*.

Определение 17. События в потоке называются *однородными*, если они различаются только по моментам времени их наступления, и *неоднородными* в противном случае.

В дальнейшем будем рассматривать только потоки однородных событий, не оговаривая это специально.

Определение 18. Поток событий называется *потоком без последствия*, или *потоком без памяти*, если для любой пары непересекающихся промежутков времени число событий за один из этих промежутков не зависит от числа событий за другой.

Очевидно, что *регулярный поток событий*, в котором события наступают через строго определенные промежутки времени, не обладает свойством отсутствия последствия, поскольку регулярность этого потока порождает последствие.

Определение 19. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность наступления за достаточно малый (элементарный) промежуток времени более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события за этот промежуток.

Определение 20. Поток событий называется *стационарным*, если вероятность наступления какого-либо числа событий за некоторый промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от момента его начала.

Очевидно, что вероятностные характеристики стационарного потока не зависят от времени, что и отражено в названии этого потока.

Определение 21. Поток событий, обладающий свойствами отсутствия последствия и ординарности, называется *пуассоновским*. Стационарный пуассоновский поток называется *простейшим*.

Интенсивность простейшего потока в силу его стационарности не зависит от времени.

Теорема 4.16. Для простейшего потока событий с интенсивностью λ случайное число событий $X(\tau) = m$ ($m = 1, 2, \dots$), наступающих за промежутком времени τ , распределено по закону Пуассона

$$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}. \quad \blacksquare \quad (4.13)$$

Эта теорема является основополагающей для теории систем массового обслуживания; доказательство данной теоремы мы опускаем. Напомним, что закон распределения Пуассона справедлив для вероятности наступления массовых и редких событий.

Дискретный марковский случайный процесс с непрерывным временем. Будем рассматривать случайные процессы с *непрерывным временем*. Пусть система S имеет n возможных состояний. Тогда *вероятностью* p_i i -го *состояния системы* в момент времени t будем называть вероятность $p(S_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$ события $S_i(t)$, состоящего в том, что система S в момент времени t находится в состоянии s_i . При этом выполнено нормировочное условие

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1, \quad t \geq 0. \quad (4.14)$$

В процессе с непрерывным временем рассматривают *плотности вероятности перехода* λ_{ij} системы S из состояния s_i в состояние s_j как предел отношения

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.15)$$

Здесь $p_{ij}(t, \Delta t)$ — вероятность того, что система S , находившаяся в момент времени t в состоянии s_i , за малый промежуток времени Δt перейдет в состояние s_j .

Отсюда выводятся *уравнения Колмогорова* — система, содержащая n дифференциальных уравнений для определения вероятностей $p_i(t)$. Эти уравнения являются основой теории систем массового обслуживания и будут рассмотрены далее.

4.3.2. Системы массового обслуживания

Системы массового обслуживания представляют собой системы специфического вида. Основой СМО является определенное число обслуживающих устройств — *каналов обслуживания*. Роль каналов в реальности могут выполнять приборы, операторы, продавцы, линии связи и пр.

Структура и классификация СМО. СМО предназначены для обслуживания *потока заявок (требований)*, представляющих последовательность событий, наступающих нерегулярно и в заранее не известные и случайные моменты времени. *Обслуживание заявок* также имеет непостоянный характер, происходит в случайные промежутки времени и зависит от многих и даже неизвестных причин. Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обуславливает неравномерность загрузки СМО: на входе могут накапливаться необслуженные заявки (перегрузка СМО) либо заявок нет или их меньше, чем свободных каналов (недогрузка СМО). Структура СМО схематически показана на рис. 4.46. В СМО поступает поток заявок; часть из них принимается на обслуживание в каналы, часть — ждет в очереди на обслуживание, часть — покидает систему необслуженными.

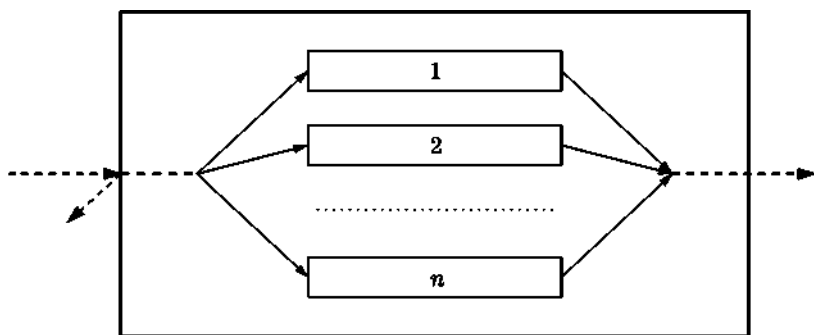


Рис. 4.46

Основными элементами СМО являются:

- 1) входной поток заявок;
- 2) очередь;
- 3) каналы обслуживания;
- 4) выходной поток заявок (обслуженные заявки).

Эффективность функционирования СМО определяется ее *пропускной способностью* — относительным числом обслуженных заявок.

По числу каналов n все СМО разделяются на одноканальные ($n = 1$) и многоканальные ($n > 1$). Многоканальные СМО могут быть как однородными (по каналам), так и разнородными (по продолжительности обслуживания заявок).

По дисциплине обслуживания различают три класса СМО:

- 1) *СМО с отказами* (нулевое ожидание или явные потери) — «отказная» заявка вновь поступает в систему, чтобы ее обслужили (например, вызов абонента через АТС);

2) *СМО с ожиданием* (неограниченное ожидание или очередь) — при занятости системы заявка поступает в очередь и в результате будет выполнена (торговля, сфера бытового и медицинского обслуживания);

3) *СМО смешанного типа* (ограниченное ожидание) — имеется ограничение на длину очереди (сервис по обслуживанию автомобилей) или на время пребывания заявки в СМО (ПВО, банк с особыми условиями обслуживания).

В дальнейшем мы будем рассматривать *открытые* (поток заявок неограничен), *упорядоченные* (заявки обслуживаются в порядке их поступления) и *однофазные* СМО (однородные каналы выполняют одну и ту же операцию).

Цель теории массового обслуживания — выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, оптимальной организации работы и регулированию потока заявок. Отсюда вытекают задачи, связанные с теорией массового обслуживания: установление зависимости работы СМО от ее организации, характера потока заявок, числа каналов и их производительности, правил работы СМО.

Основные показатели эффективности работы СМО. Эффективность работы СМО характеризуют показатели, которые можно объединить в три группы.

1. Группа показателей эффективности использования СМО:

- абсолютная пропускная способность — среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (A);
- относительная пропускная способность — отношение абсолютной пропускной способности к среднему числу заявок, поступивших в систему за единицу времени (Q);
- среднее время занятости СМО;
- коэффициент использования СМО — средняя доля времени, в течение которого система занята обслуживанием заявок.

2. Показатели качества обслуживания заявок:

- среднее время ожидания заявки в очереди ($\bar{T}_{\text{line}}$);
- среднее время пребывания заявки в СМО ($\bar{T}_{\text{sys}}$);
- вероятность отказа в обслуживании заявки без ожидания;
- вероятность немедленного приема заявки;
- закон распределения времени ожидания заявки в очереди в СМО;
- среднее число заявок в очереди ($\bar{N}_{\text{line}}$);
- среднее число заявок, находящихся в СМО ($\bar{N}_{\text{sys}}$).

3. Показатели эффективности функционирования пары «СМО — потребитель» (вся совокупность заявок или их источник, например средний доход в единицу времени от СМО). Эта группа отражает специфику работы СМО и бы-

вайт полезны, когда доход от СМО и затраты на ее обслуживание измеряются в одних и тех же единицах.

Случайный процесс в СМО. Процессы поступления и обслуживания заявок в СМО являются случайными, что обусловлено случайным характером потока заявок и длительности их обслуживания. Применение аппарата случайных процессов упрощает исследование СМО. В зависимости от характера потоков событий СМО бывают двух типов: марковские и немарковские; в дальнейшем мы будем иметь дело с системами первого типа, т.е. в основе СМО предполагается марковский случайный процесс — вероятность состояния СМО в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от прошлого. Условие марковского процесса необходимо для того, чтобы все потоки событий (потоки заявок, потоки обслуживания и т.д.), при которых система переходит из одного состояния в другое, были пуассоновскими. Преимущества и полезность такого подхода состоят в том, что для выработки обоснованных рекомендаций нужно знать не точные характеристики СМО, а лишь их приближенные значения.

Рассмотрим ряд примеров: что принять за СМО, каналы обслуживания и их число, поток заявок на входе, поток обслуживания на выходе?

Пример 20. Вызов абонента, имеющего только один телефонный номер, через АТС. Здесь поток заявок является случайным. Если абонент занят, очередная поступающая заявка получает отказ в обслуживании. АТС — это одноканальная СМО (канал обслуживания — линия связи с телефонным номером абонента) с отказами.

Пример 21. Инструментальная кладовая с тремя кладовщиками, выдающими рабочим по их требованию одинаковые наборы инструментов во время работы. Если все кладовщики заняты, очередному рабочему инструмент не выдается. Здесь кладовую следует принять за СМО (поток заявок и поток обслуженных заявок являются случайными и зависят только от настоящего состояния), число каналов обслуживания — три. Это СМО с отказами.

Пример 22. Работа телефонной справочной центрального железнодорожного агентства. Многоканальная СМО, число каналов — количество дежурных операторов, СМО с ограниченной очередью (ограничение на длину очереди — емкость памяти накопителя вызовов).

Пример 23. Железнодорожная станция принимает на пять путей пассажирские поезда и электрички, которые прибывают по расписанию каждые 15 мин на каждый из путей и отбывают после обслуживания также по расписанию через 12 мин. В данном случае теория СМО неприменима, поскольку входной и выходной потоки (приход и уход поездов) не являются случайными (организованы по расписанию).

4.3.3. Одноканальная СМО с отказами

Основные понятия. Пусть СМО включает в себя только один канал обслуживания, и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ , т.е. непрерывная случайная величина T — время между соседними заявками — распределена по закону Пуассона (4.11); другая случайная величина T_s — время обслуживания каналом одной заявки — также распределена по закону Пуассона с параметром μ :

$$f_1(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (4.16)$$

Параметры λ и μ называются соответственно *интенсивностью потока заявок* и *интенсивностью потока обслуживания*. Например, среднее значение $\bar{T}_o$ равно математическому ожиданию $M(T_o)$, откуда следует формула и название μ :

$$M(T_o) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \mu e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu}. \quad (4.17)$$

СМО может находиться в одном из двух состояний: s_0 — канал свободен (простаивает) или s_i — канал занят. Из состояния s_0 в состояние s_1 систему переводит поток входящих заявок, а из состояния s_1 в состояние s_0 — поток обслуживаний. Плотности вероятностей перехода из состояния s_0 в состояние s_1 и обратно равны соответственно λ и μ . Граф состояний СМО показан на рис. 4.47.

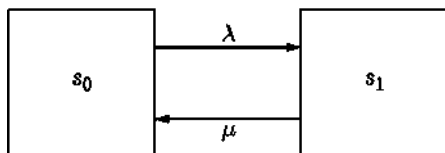


Рис. 4.47

Пусть $p_0(t)$ и $p_1(t)$ — вероятности событий, состоящих в том, что в момент времени t СМО находится в состояниях s_0 и s_1 соответственно (вероятности состояний). Очевидно, что справедливо нормировочное условие:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1. \quad (4.18)$$

В силу того, что случайный процесс, протекающий в СМО, является марковским, вероятности $p_0(t)$ и $p_1(t)$ удовлетворяют системе уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t). \end{cases} \quad (4.19)$$

Подстановка нормировочного условия (4.18) в эту систему приводит к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $p_0(t)$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu)p_0(t) = \mu, \quad t \geq 0. \quad (4.20)$$

При начальном условии, что в начальный момент времени $t = 0$ канал свободен, т.е.

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0, \quad (4.21)$$

получаем решение уравнения (4.20):

$$p_0(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu}. \quad (4.22)$$

Затем из нормировочного условия (4.18) получаем формулу для $p_1(t)$:

$$p_1(t) = \frac{\lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu}. \quad (4.23)$$

Предельный режим работы. Из формул (4.22) и (4.23) видно, что с ростом времени t вторые слагаемые в числителе стремятся к нулю, т.е. $p_0(t)$ и $p_1(t)$ заметно отличны от постоянных величин лишь в начальный интервал времени после начала работы СМО. Поскольку нас интересуют осредненные характеристики работы СМО (установившийся, или *предельный, режим работы СМО*), в дальнейшем естественно рассматривать предельные значения вероятностей состояния СМО, т.е. при $t \rightarrow \infty$. Тогда из (4.22) и (4.23) получаем предельным переходом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (4.24)$$

Заметим, что при $\mu < \lambda$ вероятность отказа выше 0,5 и превышает вероятность обслуживания.

Расчет основных показателей эффективности работы СМО. Теперь обратимся к установлению основных показателей эффективности работы СМО (см. п. 4.3.2). Поскольку вероятность обслуживания поступивших заявок равна p_0 , а относительная пропускная способность Q равна отношению среднего числа обслуженных заявок к среднему числу поступивших заявок за единицу времени, $Q = p_0$, т.е. для одноканальной СМО с отказами

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (4.25)$$

Абсолютная пропускная способность СМО — это среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, или интенсивность выходящего потока обслуженных заявок, иными словами, это часть интенсивности входящего потока заявок:

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \quad (4.26)$$

Из второй группы показателей (качества работы СМО) укажем вероятность отказа p_r в обслуживании заявки, когда канал занят; это вероятность p_1 :

$$p_r = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (4.27)$$

Среднее время обслуживания заявки, как уже говорилось, есть величина, обратная μ :

$$\bar{T}_s = \frac{1}{\mu}. \quad (4.28)$$

Аналогично среднее время простоя канала

$$\bar{T}_{st} = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.29)$$

Среднее время пребывания заявки в системе рассчитывается по формуле

$$\bar{T}_{\text{sys}} = \frac{p_0 \bar{T}_s}{\lambda + \mu} = \frac{\bar{T}_s \bar{T}_{st}}{\bar{T}_s + \bar{T}_{st}}. \quad (4.30)$$

Пример 24. Телефонная АТС имеет одну линию, на которую в среднем приходит 0,8 вызова в минуту. Среднее время разговора 2 мин. Вызов, пришедший во время разговора, не обслуживается. Считая потоки вызовов пуассоновскими, найти абсолютную и относительную пропускные способности станции и вероятность отказа абоненту.

Решение. Телефонную станцию рассматриваем как одноканальную СМО с отказами, $\bar{T}_s = 1/\mu = 2$ мин; интенсивности поступающего и обслуженного потоков заявок равны соответственно $\lambda = 0,8$, $\mu = 0,5$. Тогда по формулам (4.25)–(4.27) имеем: $Q = 0,385$, $p_r = 0,615$, $A = \lambda Q = 0,308$ выз./мин. Заметим, что абсолютная пропускная способность СМО оказалась значительно меньше интенсивности μ потока обслуживания; это обстоятельство обусловлено случайным характером потока заявок.

Пример 25. На телефонную линию приходит простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 0,9$ выз./мин; производительность линии $\mu = 1,5$ выз./мин. Вызов, пришедший на линию во время ее занятости, не обслуживается. Найти абсолютную пропускную способность линии, среднее

время обслуживания одного вызова, вероятность отказа в обслуживании, а также среднее время пребывания заявки в системе.

Решение. Используя формулы (4.26)–(4.28) и (4.30), последовательно получаем: $A = 0,563$ выз./мин; $\bar{T}_s = 0,667$ мин; $p_r = 0,375$; $T_{\text{sys}} = 0,417$ мин.

4.3.4. Многоканальная СМО с отказами

Основные понятия многоканальной СМО. Рассмотрим работу многоканальной СМО ($n > 1$) с отказами. На ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , поток обслуживаний каждым каналом также является простейшим с интенсивностью $\mu = 1/\bar{T}_s$. Пронумеруем состояния системы по числу занятых каналов (по числу заявок, находящихся в системе, — каждый канал в любой момент времени либо свободен, либо обслуживает только одну заявку). Таким образом, СМО может находиться только в одном из $n + 1$ состояний: от состояния s_0 (все каналы свободны) до состояния s_n (все каналы заняты). Заявка, поступившая в систему, когда заняты все n каналов, получает отказ в обслуживании и покидает СМО.

Граф состояний многоканальной СМО с отказами представлен на рис. 4.48.

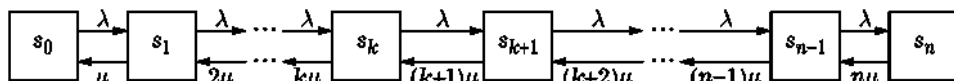


Рис. 4.48

Входной поток заявок с интенсивностью (плотностью вероятности перехода) λ переводит систему из любого состояния s_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) в соседнее состояние справа s_{k+1} , причем плотность вероятности этого перехода одинакова и равна λ . В силу ординарности входного потока заявок СМО может переходить слева направо только в соседнее состояние без перескока через какое-либо состояние.

Переход СМО в направлении справа налево из состояния s_k , когда k каналов заняты ($k = 1, 2, \dots, n$), в состояние s_{k-1} , когда освобождается один из занятых каналов, происходит под воздействием суммарного потока обслуживаний с интенсивностью $k\mu$. Следовательно, плотность вероятности такого перехода равна $k\mu$. В этом случае система также не может перескакивать через состояние, а только последовательно переходит из одного состояния в другое.

Уравнения Колмогорова для многоканальной СМО. Воспользуемся правилом составления дифференциальных уравнений Колмогорова, по которому изменение вероятности какого-либо состояния равно сумме входящих и выходящих из этого состояния (квадратика на графе состояний, см. рис. 4.48)

Здесь

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (4.37)$$

— *приведенная интенсивность* входящего потока (или показатель нагрузки СМО, или трафик), измеряемая в эрлангах. Формулы (4.36) называются *формулами Эрланга*. Они выражают предельные вероятности состояний СМО через число каналов n и показатель нагрузки ρ . Следует иметь в виду, что $0! = 1$ (в первой формуле (4.36)).

Расчет основных показателей эффективности работы СМО. Теперь обратимся к основным показателям эффективности работы многоканальной СМО с отказами.

По определению такой СМО, отказ в обслуживании заявки наступает, когда все каналы заняты и система находится в состоянии s_n ; следовательно, вероятность отказа равна вероятности p_n :

$$p_r = p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!} \quad (4.38)$$

Поскольку событие обслуживания заявки и событие отказа в ее обслуживании являются противоположными, вероятность обслуживания заявки (вероятность того, что свободен хотя бы один канал) будет:

$$p_s = 1 - p_r = 1 - p_n. \quad (4.39)$$

Относительная пропускная способность СМО определяется вероятностью ее обслуживания:

$$Q = p_s = 1 - p_r = 1 - p_n. \quad (4.40)$$

Абсолютная пропускная способность СМО (она же интенсивность потока обслуженных заявок):

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - p_n). \quad (4.41)$$

Для многоканальной СМО одним из важных показателей эффективности ее работы является *среднее число занятых каналов* $\bar{K}$ — отношение абсолютной пропускной способности к интенсивности канала обслуживания; в случае СМО с отказами эта величина совпадает со средним числом заявок, находящихся в системе, $\bar{N}_{\text{sys}}$:

$$\bar{K} = \bar{N}_{\text{sys}} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}(1 - p_n) = \rho(1 - p_n). \quad (4.42)$$

Наконец, приведем формулу для среднего времени пребывания заявки в СМО; эта характеристика относится ко всем заявкам, как к обслуженным, так и получившим отказ:

$$\bar{T}_{\text{sys}} = \frac{\bar{N}_{\text{sys}}}{\lambda}. \quad (4.43)$$

Рассмотрим примеры применения многоканальных СМО с отказами.

Пример 26. В отделении банка клиентов обслуживают три оператора. Среднее время обслуживания одного клиента оператором 12 мин. В среднем за час в банк обращаются 15 клиентов. Если все операторы заняты, клиенты не обслуживаются. Найти основные средние характеристики работы банка, а также вероятность того, что не менее двух каналов простаивают.

Решение. При условии того, что потоки заявок являются простейшими, банк можно рассматривать как СМО с отказами, число каналов $n = 3$. Приняв за единицу времени час, получаем, что интенсивность входного потока заявок $\lambda = 15$ кл/ч, интенсивность одного канала обслуживания $\mu = 5$ кл/ч. Тогда $\rho = \lambda/\mu = 3$. Используя формулы (4.37), (4.38)–(4.43), последовательно получаем:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3 + 3^2/2 + 3^3/6} = 0,077; \quad p_r = p_3 = p_0 \cdot \frac{3^3}{6} = 0,346;$$

$$Q = p_s = 1 - p_r = 1 - p_n = 0,654.$$

Из этих расчетов следует, что из каждых 100 клиентов, обратившихся в банк, в среднем будут обслужены около 65. При этом абсолютная пропускная способность СМО составит $A = \lambda Q = 9,81$ кл/ч (это меньше суммарной интенсивности потока обслуженных заявок $n\mu = 15$ кл/ч из-за случайности потоков заявок); среднее число занятых каналов или заявок в системе $\bar{K} = \bar{N}_{\text{sys}} = A/\mu = 1,962$; среднее время пребывания заявки в СМО $\bar{T}_{\text{sys}} = \bar{N}_{\text{sys}}/\lambda = 0,131$ ч = 7,85 мин. Вероятность того, что не менее двух каналов простаивают, равна сумме вероятностей $p_0 + p_1 = 0,077(1 + 3) = 0,308$.

Пример 27. Используя условия предыдущей задачи, рассчитать, как изменятся основные характеристики работы СМО, если квалификация операторов такова, что позволяет каждому из них тратить на обслуживание одного клиента в среднем 10 мин.

Решение. В этом случае $\mu = 6$ кл/ч, т.е. производительность каждого оператора повышается на 20%. Тогда при прежней интенсивности входного потока заявок получаем, что $\rho = 2,5$. Теперь имеем:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 2,5 + 2,5^2/2 + 2,5^3/6} = 0,108; \quad p_r = p_3 = p_0 \cdot \frac{2,5^3}{6} = 0,28;$$

$$Q = p_s = 1 - p_r = 0,72; \quad A = \lambda Q = 10,8 \text{ кл/ч};$$

$$\bar{K} = \bar{N}_{\text{sys}} = \frac{A}{\mu} = 1,8; \quad \bar{T}_{\text{sys}} = \frac{\bar{N}_{\text{sys}}}{\lambda} = 0,12 \text{ ч} = 7,2 \text{ мин.}$$

Из этих расчетов можно сделать следующие выводы: в результате повышения производительности труда каждого оператора на 20% вероятность обслуживания возросла на 10% (из каждых 100 клиентов, обратившихся в банк, в среднем будут обслужены 72), пропускная способность СМО также возросла на 10%, среднее число занятых каналов (среднее число заявок в системе) и среднее время пребывания заявки в системе уменьшились на 8%.

Пример 28. Используя условия примера 26, определить минимально целую среднюю производительность операторов (интенсивность μ потока обслуживания одним каналом), чтобы вероятность обслуживания клиентов банка была не ниже 0,9.

Решение. Из условия задачи $1 - p_n \geq 0,9$ следует, что $p_n \leq 0,1$. Путем подбора определяем: если $\mu = 13$, то $p_s < 0,9$; если $\mu = 14$, то $p_3 = 0,072$, т.е. $p_s = 0,928$, что и приводит к ответу $\mu \geq 14$ кл/ч.

4.3.5. Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди

Основные понятия и схема. Рассмотрим многоканальную СМО ($n \geq 1$) с ожиданием, т.е. заявка, поступившая в СМО в момент времени, когда все каналы заняты, не покидает систему необслуженной, а становится в очередь и ожидает обслуживания. Следует отметить, что большинство обслуживающих компаний и учреждений устроены как раз по такому принципу. Пусть максимальное число мест в очереди $m \geq 1$, т.е. в очереди могут ожидать своего обслуживания не более m заявок. Поэтому заявка, пришедшая на вход в СМО в момент, когда в очереди уже находятся m заявок, получает отказ и покидает систему. Иными словами, «заполнение» СМО заявками из входного потока идет в два этапа: сначала загружаются каналы обслуживания, затем заполняется очередь. Нумерация состояний системы в этом случае имеет следующий вид: от состояния s_0 (в СМО нет заявок, все каналы свободны) до состояния s_n (в СМО n заявок, все каналы заняты) — очереди нет; от состояния s_{n+1} (в СМО $n + 1$ заявка, все каналы заняты, одна заявка находится в очереди) до состояния s_{n+m} (все каналы заняты, все m мест в очереди заняты заявками) происходит заполнение очереди.

Граф состояний СМО показан на рис. 4.49. Переход системы из состояния s_k в состояние s_{k+1} слева направо ($k = 0, 1, \dots, n + m - 1$) происходит под

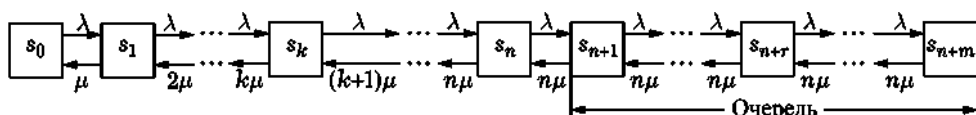


Рис. 4.49

Второе слагаемое в правой части этого равенства является суммой m членов геометрической прогрессии с первым членом ψ^{n+1} и знаменателем ψ , т.е. формула для p_0 упрощается:

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}(1-\psi^m)}{1-\psi} \right)^{-1}, & \psi \neq 1; \\ \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} m \right)^{-1}, & \psi = 1. \end{cases} \quad (4.46)$$

Остальные предельные вероятности состояний имеют вид, аналогичный формулам (4.36):

$$p_k = \begin{cases} \frac{n^k}{k!} \psi^k p_0, & k = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{n^n}{n!} \psi^k p_0, & k = n+1, n+2, \dots, n+m. \end{cases} \quad (4.47)$$

Расчет основных показателей эффективности работы. Вероятность отказа (заявка поступила в момент, когда заняты все n каналов и все m мест в очереди) есть вероятность того, что СМО находится в состоянии s_{n+m} , откуда получаем

$$p_r = p_{n+m} = \frac{n^n}{n!} \psi^{n+m} p_0. \quad (4.48)$$

Так как события отказа заявки и приема ее в СМО являются противоположными, вероятность приема заявки в СМО равна вероятности p_{sys} и относительной пропускной способности системы:

$$p_{\text{sys}} = Q = 1 - p_r = 1 - \frac{n^n}{n!} \psi^{n+m} p_0. \quad (4.49)$$

Отсюда получаем формулу для абсолютной пропускной способности:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{n^n}{n!} \psi^{n+m} p_0 \right). \quad (4.50)$$

Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени, среднее число обслуживаемых заявок (или среднее число занятых каналов) подсчитывается по формуле

$$\bar{N}_s = \bar{K} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = \rho \left(1 - \frac{n^n}{n!} \psi^{n+m} p_0 \right). \quad (4.51)$$

Для вычисления среднего числа заявок $\bar{N}_{\text{line}}$, находящихся в очереди, рассмотрим дискретную случайную величину N_{line} — число заявок в очереди. Закон распределения N_{line} имеет следующий вид:

N_{line}	0	1	2	...	m
P	p_s	p_{n+1}	p_{n+2}	...	p_{n+m}

Здесь $p_s = \sum_{k=1}^n p_k$, поскольку событие, состоящее в том, что в очереди нет ни одной заявки, является объединением событий, заключающихся в том, что СМО находится в одном из состояний $s_0, s_1, \dots, s_n$. Так как $\bar{N}_{\text{line}}$ является математическим ожиданием случайной величины N_{line} , получаем

$$\bar{N}_{\text{line}} = M(N_{\text{line}}) = \sum_{k=1}^m k p_{k+n} = \frac{n^n}{n!} p_0 \sum_{k=1}^m k \psi^{k+n} = \frac{n^n}{n!} p_0 \psi^{n+1} \sum_{k=1}^m k \psi^{k-1}.$$

Сумма в последнем равенстве имеет выражение в виде компактной формулы как при $\psi \neq 1$ (формула суммирования), так и при $\psi = 1$ (сумма отрезка натурального ряда чисел). Соответственно получаем окончательное выражение для среднего числа заявок в очереди:

$$\bar{N}_{\text{line}} = \begin{cases} \frac{n^n}{n!} \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m (m+1 - m\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0, & \psi \neq 1; \\ \frac{n^n}{n!} \frac{m(m+1)}{2} p_0, & \psi = 1. \end{cases} \quad (4.52)$$

Среднее число заявок, находящихся в системе, равно сумме средних чисел обслуживаемых заявок и заявок, находящихся в очереди:

$$\bar{N}_{\text{sys}} = \bar{N}_{\text{line}} + \bar{N}_s. \quad (4.53)$$

Для средних величин времени обслуживания заявки, времени ожидания заявки в очереди и времени пребывания заявки в системе имеем соответственно следующие формулы (формулы Литтла):

$$\bar{T}_s = \frac{\bar{N}_s}{\lambda}, \quad (4.54)$$

$$\bar{T}_{\text{line}} = \frac{\bar{N}_{\text{line}}}{\lambda}, \quad (4.55)$$

$$\bar{T}_{\text{sys}} = \bar{T}_s + \bar{T}_{\text{line}} = \frac{\bar{N}_s + \bar{N}_{\text{line}}}{\lambda} = \frac{\bar{N}_{\text{sys}}}{\lambda}. \quad (4.56)$$

Формулы (4.46)–(4.56) позволяют рассчитать все показатели эффективности работы многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 29. В пункте валютного обмена работают два оператора, каждый из которых обслуживает клиента в среднем за 2,5 мин. По условиям безопасности в помещении пункта может находиться одновременно не более пяти человек, включая обслуживаемых клиентов. Если помещение заполнено,

то очередной клиент не становится в очередь, а уходит. В среднем клиенты приходят каждые 2 мин. Найти основные показатели эффективности работы обменного пункта.

Решение. Математической моделью данного обменного пункта является многоканальная СМО ($n = 2$) с ожиданием и ограничением на длину очереди ($m = 3$). Предполагается, что потоки прибывающих клиентов и обслуживания простейшие. Интенсивность входящего потока $\lambda = 0,5$ кл/мин, интенсивность потока обслуживания $\mu = 0,4$ кл/мин. Отсюда показатель нагрузки СМО $\rho = \lambda/\mu = 1,25$ эрланга, а показатель нагрузки на один канал $\psi = \rho/n = 0,625$ эрланга. Вероятность простоя системы (оба канала свободны) определяется по формуле (4.46) при $n = 2$, $m = 3$ и $\psi \neq 1$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{2}{1!} \cdot 0,625 + \frac{2^2}{2!} \cdot 0,625^2 + \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{0,625^3(1 - 0,625^3)}{1 - 0,625}\right)^{-1} = 0,249.$$

Вероятность отказа в соответствии с формулой (4.48) равна

$$p_r = p_5 = \frac{2^2}{2!} \cdot 0,625^5 \cdot 0,249 = 0,047,$$

т.е. из каждых 100 клиентов, обратившихся в обменный пункт, в среднем обслуживаются 95 клиентов.

Относительная пропускная способность (формула (4.49)):

$$Q = 1 - 0,047 = 0,953.$$

Абсолютная пропускная способность согласно формуле (4.50):

$$A = \lambda Q = 0,5 \cdot 0,953 = 0,477.$$

Далее по формулам (4.51)–(4.56) находим остальные показатели эффективности работы СМО:

- среднее число обслуживаемых клиентов (среднее число занятых операторов):

$$\overline{N}_s = \overline{K} = \frac{A}{\mu} = \rho Q = 1,25 \cdot 0,953 = 1,191;$$

- среднее число ожидающих в очереди клиентов:

$$\overline{N}_{\text{line}} = \frac{2^2}{2!} \cdot 0,625^3 \cdot \frac{1 - 4 \cdot 0,625^3 + 3 \cdot 0,625^4}{(1 - 0,625)^2} \cdot 0,249 = 0,414;$$

- среднее число клиентов в системе:

$$\overline{N}_{\text{sys}} = \overline{N}_{\text{line}} + \overline{N}_s = 1,191 + 0,414 = 1,605;$$

- среднее время обслуживания клиента:

$$\overline{T}_s = \frac{\overline{N}_s}{\lambda} = \frac{1,191}{0,5} = 2,382 \text{ (мин)};$$

- среднее время пребывания клиента в очереди:

$$\overline{T}_{\text{line}} = \frac{\overline{N}_{\text{line}}}{\lambda} = \frac{0,414}{0,5} = 0,828 \text{ (мин)};$$

- среднее время пребывания клиента в пункте валютного обмена:

$$\overline{T}_{\text{sys}} = \overline{T}_s + \overline{T}_{\text{line}} = 2,382 + 0,828 = 3,21 \text{ (мин)}.$$

Пример 30. Используя условия примера 29, определить, как повлияет на вероятность отказа увеличение числа операторов до трех человек.

Решение. В данном случае число каналов $n = 3$, число мест в очереди $m = 2$. Вероятность простоя системы согласно формуле (4.46)

$$p_0 = \left(1 + \frac{2}{1!} \cdot 0,625 + \frac{2^2}{2!} \cdot 0,625^2 + \frac{2^3}{3!} \cdot 0,625^3 + \frac{2^3}{3!} \frac{0,625^4 (1 - 0,625^2)}{1 - 0,625} \right)^{-1} = 0,271.$$

Поэтому вероятность отказа равна

$$p_r = p_5 = \frac{2^3}{3!} \cdot 0,625^5 \cdot 0,271 = 0,034.$$

По сравнению с предыдущим примером вероятность отказа изменилась весьма незначительно: теперь из каждых 100 клиентов, обратившихся в пункт, в среднем будут обслуживаться около 97 человек, т.е. характеристика показателя числа обслуживаемых клиентов изменилась в сторону улучшения всего на 2%. По-видимому, в данном случае целесообразнее будет не увеличивать число операторов, а уменьшить время обслуживания (увеличить производительность μ обслуживания каждым оператором).

Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью. Формулы (4.46)–(4.56) легко распространяются на частный случай одноканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.

Полагая $n = 1$ и $\psi = \rho$, получаем вероятность простоя системы:

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k \right)^{-1} = \frac{1 - \rho^{m+2}}{1 - \rho}, & \rho \neq 1; \\ \left(\sum_{k=0}^{m+1} k \right)^{-1} = \frac{1}{m+2}, & \rho = 1. \end{cases} \quad (4.57)$$

Вероятности отказа в обслуживании и принятии заявки в систему определяются формулами

$$p_r = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0; \quad p_{\text{sys}} = 1 - \rho^{m+1} p_0. \quad (4.58)$$

Аналогичным образом выводятся остальные показатели эффективности работы одноканальной СМО, в формулах (4.50)–(4.56) нужно только положить $n = 1$ и $\psi = \rho$.

4.3.6. Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

Общая схема. Рассмотрим СМО, состоящую из n каналов ($n \geq 1$), с ожиданием и без ограничения на длину очереди и время ожидания. Такие приложения часто встречаются на практике, когда на длину очереди заявок, ожидающих обслуживания, не накладывается никаких ограничений (например, кассы вокзалов и метрополитена, магазины и торговые точки). Заявка, поступившая в систему в момент времени, когда все n каналов заняты, становится в очередь и ожидает своего обслуживания; любая поступившая заявка будет обслужена. По-прежнему поток заявок и потоки обслуживания каждым каналом являются простейшими с интенсивностями соответственно λ и μ . Данная СМО может находиться в одном из бесконечного множества состояний:

s_k ($k = 0, 1, \dots, n$) — k каналов заняты, очереди нет;

s_{n+m} ($m = 1, 2, \dots$) — все n каналов заняты, в очереди находятся m заявок.

Граф состояний такой СМО аналогичен случаю n -канальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди с той лишь разницей, что правого крайнего состояния нет, и граф является бесконечным. Предельный (стационарный) режим марковского случайного процесса, протекающего в СМО, будет существовать при условии, что интенсивность обслуживания всех n каналов будет выше интенсивности λ входящего потока, т.е.

$$\lambda < n\mu, \quad \text{или} \quad \psi < 1. \quad (4.59)$$

Если это условие не выполняется, то очередь заявок в системе будет неограниченно расти с течением времени (переполнение системы).

Расчет основных показателей эффективности работы СМО. Для получения расчетных формул для основных характеристик СМО нужно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$ в формулах (4.46)–(4.52). Вычисляя соответствующие пределы, получаем сначала формулы для вероятностей состояний:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi} \right)^{-1};$$

$$p_k = \begin{cases} \frac{n^k}{k!} \psi^k p_0, & k = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{n^n}{n!} \psi^k p_0, & k = n+1, n+2, \dots \end{cases} \quad (4.60)$$

Можно непосредственно проверить, что найденные вероятности удовлетворяют нормировочному условию $p_0 + p_1 + \dots = 1$.

Вычисление вероятности отказа в приеме заявки, как и следовало ожидать, при предельном переходе во второй строке формулы (4.59) дает:

$$p_r = 0. \quad (4.61)$$

Тогда вероятность того, что пришедшая заявка будет принята в систему:

$$p_{\text{sys}} = 1, \quad (4.62)$$

что соответствует исходному предположению о свойстве СМО — любая поступившая заявка будет обслужена.

Существенно упрощаются и другие формулы. Приведем их. Относительная пропускная способность системы согласно формуле (4.49):

$$Q = 1. \quad (4.63)$$

Из формулы (4.48) получаем, что абсолютная пропускная способность СМО определяется только интенсивностью входящего потока:

$$A = \lambda. \quad (4.64)$$

Аналогично из формулы (4.51) получаем, что среднее число занятых каналов (обслуживаемых заявок) равно показателю нагрузки СМО:

$$\overline{N}_s = \overline{K} = \frac{A}{\mu} = \rho. \quad (4.65)$$

Из формулы (4.52) предельным переходом при $m \rightarrow \infty$ получаем формулу для среднего числа заявок, находящихся в очереди:

$$\overline{N}_{\text{line}} = \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2} p_0. \quad (4.66)$$

Далее из формул (4.53)–(4.56) получаются остальные характеристики СМО и ее работы.

Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью. Такую СМО можно рассматривать как частный случай (при $n = 1$) многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью. Соответствующие характеристики эффективности работы получаются из формул (4.58), (4.60) и (4.66) при $n = 1$ и $\psi = \rho$:

$$p_k = \rho^k (1 - \rho), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.67)$$

$$\bar{N}_{\text{line}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (4.68)$$

Пример 31. В кассе метрополитена, продающей карточки на проезд, работают два окна. В среднем один кассир тратит на обслуживание одного пассажира 0,5 мин. В среднем к кассе подходит 3 чел./мин. Найти основные показатели эффективности работы кассы.

Решение. Касса метрополитена моделируется двухканальной СМО с ожиданием и без ограничения на длину очереди. Параметры системы: $n = 2$, $\lambda = 3$ чел./мин, $\mu = 2$ чел./мин. Нагрузка системы $\rho = \lambda/\mu = 1,5$, показатель нагрузки на один канал $\psi = \rho/n = 0,75$, т.е. предельный режим работы существует, и можно рассчитать основные показатели эффективности работы СМО в данном режиме.

Вероятность простоя системы (оба кассира свободны) равна

$$p_0 = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0,75 + \frac{2^2}{2!} \cdot 0,75^2 + \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{0,75^3}{1 - 0,75}} = 0,143.$$

Среднее число занятых кассиров (среднее число обслуживаемых пассажиров)

$$\bar{N}_s = \bar{K} = \frac{A}{\mu} = \rho = 1,5.$$

Среднее число пассажиров в очереди определяется по формуле (4.68):

$$\bar{N}_{\text{line}} = \frac{2^2}{2!} \frac{0,75^3}{(1 - 0,75)^2} 0,143 = 1,931.$$

По формуле (4.53) подсчитываем среднее число пассажиров у касс:

$$\bar{N}_{\text{sys}} = \bar{N}_{\text{line}} + \bar{N}_s = 1,931 + 1,5 = 3,431.$$

По формулам Литтла определяем среднее время пассажира в очереди и среднее время, которое пассажир тратит на приобретение карточки на проезд:

$$\bar{T}_{\text{line}} = \frac{\bar{N}_{\text{line}}}{\lambda} = \frac{1,931}{3} = 0,644 \text{ (мин)}; \quad \bar{T}_{\text{sys}} = \frac{\bar{N}_{\text{sys}}}{\lambda} = \frac{3,431}{3} = 1,144 \text{ (мин)}.$$

4.4. Элементы теории игр

4.4.1. Основные понятия

На практике нередко возникают ситуации, когда при наличии многих участников эффективность решения одного из них зависит от того, какие решения приняли другие участники. Например, доход организации от продажи товаров зависит не только от установленной на них цены, но и от количества купленных покупателями товаров; при выборе ассортимента товаров, выпускаемых организацией, нужно учитывать, какой ассортимент товаров выпускают другие организации.

Ситуации, когда эффективность действий одного из участников зависит от действий других, бывают двух типов: интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. Во втором случае может оказаться невыгодным сообщать другим участникам о своих решениях, так как кто-нибудь из них может воспользоваться этим и получить больший выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются конфликтными. Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается *теория игр*.

Математическая теория игр ведет свое начало от анализа салонных, карточных, спортивных игр. Впервые теория игр была системно изложена Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в 1944 г. В их публикации в основном рассматривалась экономическая ситуация, которую легко описать в численной форме.

Уже во время Второй мировой войны теория игр была применена в военном деле для исследования стратегических решений. Во второй половине XX в. главное внимание в теории игр стали уделять ее экономическим приложениям.

В игре могут сталкиваться интересы двух или нескольких противников, соответственно игры бывают *парные* и *множественные*. Если во множественной игре интересы игроков совпадают, то они могут объединяться, создавая коалиции. Такие игры называются *коалиционными*. Коалиции начинают выступать как отдельные игроки. После того как в игре определен выигрыш, коалиции могут распасться для дележа выигрыша между отдельными игроками методами теории игр. В *бескоалиционных* играх цель каждого участника — получение максимального индивидуального выигрыша. Игры могут быть кооперативными и некооперативными. *Кооперативные игры* — это игры с ненулевой суммой, в которых игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом и вступать в коалиции. *Некооперативные игры* — игры, в которых участвуют не менее трех человек, принимающих решения независимо друг от друга, так как согласование действий запрещено правилами игры.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальной стратегии. *Стратегией* игрока называется система правил, однозначно определяющих поведение игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. *Оптимальной* называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, соответственно игры бывают конечные и бесконечные.

Рассмотрим простейшую математическую модель *конечной конфликтной ситуации*, когда имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется *антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой*.

В игре участвуют два игрока, каждый из которых записывает независимо от другого цифру 1, 2 или 3. Если разность между цифрами, записанными первым и вторым игроками, положительная, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и наоборот, если разность отрицательная, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

Пусть у первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 (записать 2), A_3 (записать 3); у второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3 (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Стратегии	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$
$A_1 = 1$	0	-1	-2
$A_2 = 2$	1	0	-1
$A_3 = 3$	2	1	0

Задача первого игрока — максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока — минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

Игру можно представить в виде матрицы, в которой строки — стратегии первого игрока, столбцы — стратегии второго игрока, а элементы матрицы — выигрыши первого игрока. Такую матрицу называют *платежной*.

Для данного примера платежная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}.$$

В общем случае парную игру с нулевой суммой можно записать платежной матрицей

$$(a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Задача каждого из игроков — найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Минимальное число a_{ij} в каждой строке обозначим α_i ($i = \overline{1, m}$):

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Зная α_i , т.е. минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i , первый игрок выберет ту стратегию, для которой α_i максимально. Обозначим это максимальное значение α , тогда

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α — гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок, называется *нижней ценой игры* (максимином).

Аналогично для определения наилучшей стратегии второго игрока найдем максимальные значения выигрыша по столбцам и, выбрав из них минимальное значение, получим:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

где β — *верхняя цена игры* (минимакс).

Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантированно проиграет не больше β .

Для матричной игры справедливо неравенство

$$\alpha \leq \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, то такая игра называется *игрой с седловой точкой*, а пара оптимальных стратегий $(A_{i \text{ опт}}, B_{j \text{ опт}})$ — *седловой точкой матрицы*. В этом случае элемент $a_{ij} = v$, именуемый *ценой игры*, является одновременно минимальным в i -й строке и j -м столбце. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Найдем решение игры рассмотренного примера:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max \{-2, -1, 0\} = 0; \quad \alpha = \alpha_3 \text{ — нижняя цена игры;}$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min \{2, 1, 0\} = 0; \quad \beta = \beta_3 \text{ — верхняя цена игры.}$$

Так как $\alpha = \beta = 0$, матрица игры имеет седловую точку.

Оптимальная стратегия первого игрока — A_3 , второго — B_3 . Из табл. 4.8 видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от B_3 увеличивает его проигрыш.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к формированию сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассмотреть как m -мерные векторы, для координат которых

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n -мерные векторы $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, для координат которых

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Выигрыш второго игрока при использовании смешанных стратегий определяют как математическое ожидание выигрыша

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

В теории игр утверждается, что каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Применение оптимальной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры: $a \leq v \leq b$.

Применение первым игроком оптимальной стратегии $x_{i_{\text{опт}}}$ должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. Поэтому выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{i_{\text{опт}}} \geq v.$$

Аналогично для второго игрока оптимальная стратегия $y_{j_{\text{опт}}}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры, т.е. справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_{j_{\text{опт}}} \leq v.$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и заведомо невыгодных стратегий.

Пример 32. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4 \times 5}.$$

Здесь $\alpha = \max\{2, 2, 3, 2\} = 3, \beta = \min\{7, 6, 6, 4, 5\} = 4, \alpha \neq \beta$.

Все элементы A_2 меньше либо равны A_3 , т.е. стратегия A_2 заведомо невыгодна для первого игрока и ее можно исключить. Все элементы A_4 меньше A_3 , поэтому исключаем A_4 .

Для второго игрока, сравнивая B_1 и B_4 , исключаем B_1 ; сравнивая B_2 и B_4 , исключаем B_2 ; сравнивая B_3 и B_4 , исключаем B_3 . В результате преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Теория игр тесно связана с линейным программированием, поскольку каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплекс-методом и, наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как конечная игра двух лиц с нулевой суммой (см. подразд. 6.2).

4.4.2. Графическое решение игр

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии.

Рассмотрим игру $(2 \times n)$ (табл. 4.9). Предполагаем, что игра не имеет седловой точки.

Таблица 4.9

Первый игрок	Второй игрок			
	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}

Введем обозначения: x_1 — вероятность применения первым игроком 1-й стратегии, x_2 — вероятность применения первым игроком 2-й стратегии,

причем $x_2 = 1 - x_1$; y_1 — вероятность применения вторым игроком 1-й стратегии, y_2 — вероятность применения вторым игроком 2-й стратегии и т.д., y_n — вероятность применения вторым игроком n -й стратегии.

Ожидаемый выигрыш первого игрока при применении вторым игроком 1-й стратегии составит:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{11}x_1 + a_{21} - a_{21}x_1 = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}.$$

Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком 2-й, 3-й, ..., n -й стратегий. Полученные данные поместим в табл. 4.10.

Таблица 4.10

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$
...	...
n	$(a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}$

Из табл. 4.10 видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от x_1 . Построим прямые ожидаемых выигрышей первого игрока (рис. 4.50).

Первый игрок должен выбирать такие стратегии, которые позволяют ему максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, в которой достигается максимум его минимального ожидаемого выигрыша.

Аналогично находим оптимальную стратегию второго игрока. Она определяется как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимально ожидаемые проигрыши.

Пример 33. Рассмотрим игру из примера 32:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4 \times 5}.$$

Найдем оптимальные стратегии игроков и цену игры.

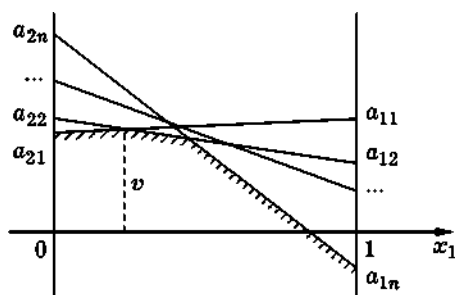


Рис. 4.50

Решение. Введем обозначения: x_i ($i = \overline{1, 4}$) — вероятность применения первым игроком i -й стратегии, причем $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$; y_j ($j = \overline{1, 5}$) — вероятность применения вторым игроком j -й стратегии, причем $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1$.

Платежная матрица была упрощена путем вычеркивания дублирующих, заведомо невыгодных стратегий. Поэтому $x_2 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ и матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Найдем ожидаемые выигрыши первого игрока (табл. 4.11).

Таблица 4.11

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(4 - 3)x_1 + 3 = x_1 + 3$
2	$(2 - 5)x_1 + 5 = -3x_1 + 5$

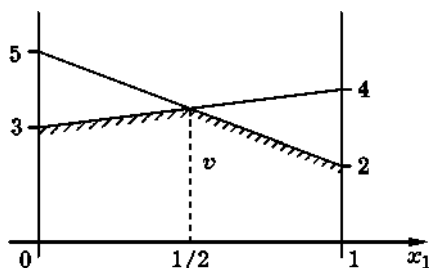


Рис. 4.51

Найдем решение игры графическим методом (рис. 4.51). На оси x_1 отметим точки $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, через которые проведем прямые, перпендикулярные оси x_1 . Подставляя $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ в выражение $x_1 + 3$, найдем значения 3 и 4, которые отложим на соответствующих перпендикулярных прямых. Соединив эти точки, получим прямую $x_1 + 3$.

Аналогично построим прямую $-3x_1 + 5$.

Оптимальная стратегия первого игрока определится как точка пересечения прямых $x_1 + 3$ и $-3x_1 + 5$:

$$x_1 + 3 = -3x_1 + 5, \quad x_1 = 1/2, \quad x_3 = 1 - x_1 = 1/2.$$

Цена игры $v = x_1 + 3 = 1/2 + 3 = 7/2$.

Оптимальная стратегия первого игрока: $\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2, 0, 1/2, 0)$, при этом цена игры $v = 7/2$.

Найдем оптимальную стратегию второго игрока (табл. 4.12).

Решение игры ищем графическим методом (рис. 4.52). Оптимальная стратегия второго игрока определится как точка пересечения прямых $2y_4 + 2$ и $-2y_4 + 5$:

$$2y_4 + 2 = -2y_4 + 5, \quad y_4 = \frac{3}{4}, \quad y_5 = 1 - y_4 = \frac{1}{4}, \quad v = 2y_1 + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

Таблица 4.12

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$(4 - 2)y_4 + 2 = 2y_4 + 2$
2	$(3 - 5)y_4 + 5 = -2y_4 + 5$

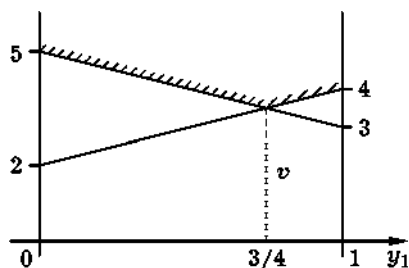


Рис. 4.52

Итак, оптимальная стратегия второго игрока: $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 0, 0, 3/4, 1/4)$, при этом цена игры $v = 7/2$.

Пример 34. Найдем решение игры вида $(2 \times n)$, заданной платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 4}.$$

Решение. В данном случае $\alpha = \max \{-1, 2\} = 2$, $\beta = \min \{4, 3, 3, 6\} = 3$, $2 \leq v \leq 3$. Решение игры следует искать в смешанных стратегиях. Найдем ожидаемые выигрыши первого игрока (табл. 4.13).

Таблица 4.13

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

Найдем решение графическим методом (рис. 4.53):

$$-x_1 + 3 = x_1 + 2, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 - x_1 = \frac{1}{2}, \quad v = -x_1 + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}.$$

Оптимальное решение первого игрока: $\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2, 1/2)$, при этом цена игры составляет $v = 5/2$.

Найдем оптимальное решение второго игрока. Из рис. 4.53 следует, что оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых $-x_1 + 3$ и $x_1 + 2$, соответствующих 2-й и 3-й чистым стратегиям второго игрока (см. табл. 4.13), поэтому

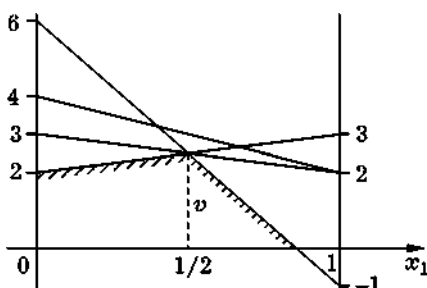


Рис. 4.53

$y_1 = y_4 = 0$, а $y_3 = 1 - y_2$ (табл. 4.14). В результате находим:

$$-y_2 + 3 = y_2 + 2, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad v = y_2 + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Итак, оптимальное решение второго игрока $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 1/2, 1/2, 0)$, а цена игры $v = 5/2$ (рис. 4.54).

Таблица 4.14

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$-y_2 + 3$
2	$y_2 + 2$

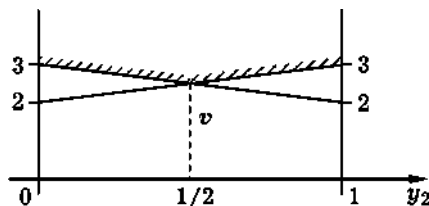


Рис. 4.54

Пример 35. Найдём решение игры вида $(m \times 2)$, заданной платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}_{4 \times 2}.$$

Решение. В данном случае $\alpha = \max \{2, 2, 2, -2\} = 2$, $\beta = \min \{3, 6\} = 3$ и $2 \leq v \leq 3$, т.е. решение задачи следует искать в смешанных стратегиях.

Пусть y_1 и $y_2 = 1 - y_1$ — вероятности смешанной стратегии второго игрока. Найдём ожидаемые проигрыши второго игрока (табл. 4.15). Далее находим решение графическим методом (рис. 4.55):

$$-2y_1 + 4 = y_1 + 2, \quad y_1 = \frac{2}{3}, \quad y_2 = 1 - y_1 = \frac{1}{3}, \quad v = y_1 + 2 = \frac{8}{3}.$$

Таблица 4.15

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$-2y_1 + 4$
2	$-y_1 + 3$
3	$y_1 + 2$
4	$-8y_1 + 6$

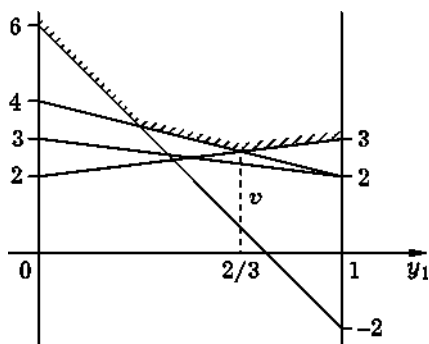


Рис. 4.55

Итак, оптимальное решение второго игрока: $\bar{y}_{\text{опт}} = (2/3, 1/3)$, цена игры $v = 8/3$.

Прямые, пересекающиеся в минимаксной точке, соответствуют 1-й и 3-й чистым стратегиям первого игрока. Это означает, что $x_2 = x_4 = 0$. Следовательно, $x_1 = 1 - x_3$.

Найдем ожидаемые выигрыши первого игрока (табл. 4.15). Используя графический метод, определяем оптимальные вероятности для первого игрока (рис. 4.56):

$$-x_1 + 3 = 2x_1 + 2, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1 - x_1 = \frac{2}{3}, \quad v = -x_1 + 3 = \frac{8}{3}.$$

Таблица 4.16

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые проигрыши первого игрока
1	$-x_1 + 3$
2	$2x_1 + 2$

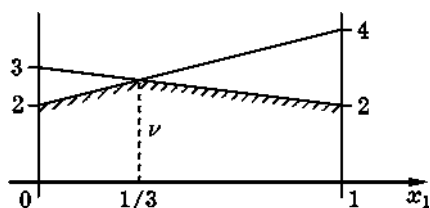


Рис. 4.56

Итак, оптимальное решение первого игрока: $\bar{x}_{\text{опт}} = (1/3, 0, 2/3, 0)$, цена игры $v = 8/3$.

4.4.3. Игры с природой

Для рассмотренных матричных игр предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются играми с природой. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа) действует случайно. Условия игры задаются матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$.

Пусть игрок A имеет стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$, а природа — состояния $B_1, B_2, \dots, B_n$. Наиболее простой является ситуация, когда известна вероятность p_j каждого состояния природы B_j . Тогда, если учтены все возможные состояния, то

$$p_1 + p_2 + \dots + p_j + \dots + p_n = 1.$$

Если игрок A выбирает чистую стратегию A_i , то математическое ожидание выигрыша составит $p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in}$. Наиболее выгодной будет та стратегия, при которой достигается

$$\max_i (p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in}).$$

Если информация о состояниях природы неполна, то можно использовать принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которому можно считать, что все состояния природы равновероятны. Тогда оптимальной будет стратегия, при которой достигается

$$\max_i \frac{a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}}{n},$$

т.е. стратегия, для которой среднее арифметическое элементов соответствующей строки максимальное.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Вальде. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она находится из условия

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека способом.

2. Критерий максимума. Стратегия выбирается из условия

$$\max_i \max_j a_{ij}.$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. Критерий Гурвица. Рекомендуется стратегия, определяемая по формуле

$$\max_i (\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij}),$$

где α — степень оптимизма, меняющаяся в диапазоне $[0, 1]$.

В критерии учитывается возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальде, при $\alpha = 0$ — в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. Критерий Сэвиджа. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, которая не допускает чрезмерно высоких потерь. Находится матрица рисков,

элементы которой показывают, какой убыток понесет человек, если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

Элементы матрицы рисков (r_{ij}) находятся по формуле

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

где $\max_i a_{ij}$ — максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия находится из выражения:

$$\min_i \max_j \left(\max_i a_{ij} - a_{ij} \right).$$

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью выбрать наилучшее решение; если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение нужно принимать с учетом его сильных и слабых сторон.

4.4.4. Применение игр с природой в экономике

Изменение конъюнктуры на потребительском рынке из-за сезонности продукции сказывается на выработке стратегий компаний. В условиях неопределенности рынка выбрать оптимальную стратегию достаточно сложно, но, применяя математические методы и учитывая определенную направленность, можно получать максимальную прибыль и в таких условиях. Стратегия поведения на рынке в условиях неопределенности уменьшает фактор случайности, что позволяет с большей вероятностью прогнозировать получение прибыли.

Потребительский спрос и объем продаж многих видов товаров зависят от сезона. Замечено, что у некоторых товаров пик спроса приходится на лето, у некоторых — на весенне-осенний период, у некоторых — на зиму. В связи с этим определенный интерес для компаний представляет выработка оптимальной стратегии в переходные периоды. В качестве примера найдем оптимальную стратегию фармацевтической компании.

Пример 36. Компания является производителем медикаментов и биомедицинских изделий. Известно, что пик спроса на одни лекарственные препараты (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики) приходится на летний период, на другие (антиинфекционные, противокашлевые) — на весенний и осенний периоды.

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь — октябрь составили: по первой группе (сердечно-сосудистые препараты и анальгетики) — 20 ден. ед.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) — 15 ден. ед.

По данным наблюдений за несколько лет, служба маркетинга компании установила, что компания может реализовать в течение двух рассматриваемых месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды — 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача определить стратегию компании в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи за 1 усл. ед. продукции первой группы 40 ден. ед. и второй группы — 30 ден. ед.

Решение. Компания может выбрать одну из двух стратегий:

A_1 — для теплой погоды;

A_2 — для холодной погоды.

Если компания выберет стратегию A_1 и в действительности будет теплая погода (стратегия природы B_1), то выпущенная продукция (3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы) будет полностью реализована и прибыль составит:

$$3050 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) = 77\,500 \text{ (ден. ед.)}.$$

В условиях прохладной погоды (стратегия природы B_2) препараты второй группы будут проданы полностью, а первой группы — только в количестве 1525 усл. ед. Прибыль составит:

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - (3050 - 1525) \cdot 20 = 16\,500 \text{ (ден. ед.)}.$$

Если же компания выберет стратегию A_2 и в действительности будет холодная погода, то прибыль составит:

$$1525 \cdot (40 - 20) + 3690 \cdot (30 - 15) = 85\,850 \text{ (ден. ед.)}.$$

При теплой погоде прибыль составит:

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - (3690 - 1100) \cdot 15 = 8150 \text{ (ден. ед.)}.$$

Рассматривая компанию и погоду (покупательский спрос) в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

	B_1	B_2
A_1	77500	16500
A_2	8150	85850

для которой $\alpha = \max\{16500, 8150\} = 16500$ ден. ед., $\beta = \min\{77500, 85850\} = 77500$ ден. ед.

Цена игры лежит в диапазоне 16 500 ден. ед. $\leq v \leq 77 500$ ден. ед.

Из платежной матрицы видно, что при всех условиях прибыль компании будет не меньше 16 500 ден. ед., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то прибыль компании может составлять и 85 850 ден. ед.

Найдем решение игры. Обозначим через x_1 вероятность применения фирмой стратегии A_1 , через x_2 — стратегии A_2 , причем $x_1 = 1 - x_2$. Решая игру графическим методом, получим: $\bar{x}_{\text{опт}} = (0,56, 0,44)$, при этом цена игры $v = 46 986$ ден. ед.

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит:

$$0,56 \cdot (3050, 1100) + 0,44 \cdot (1525, 3690) = (2379, 2239).$$

Таким образом, компании целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 усл. ед. препаратов первой группы и 2239 усл. ед. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 46 986 ден. ед.

Если компания не может изменить план производства, то для определения оптимальной стратегии она должна использовать критерии природы.

1. По критерию Вальде имеем:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max \{16 500, 8150\} = 16 500 \text{ (ден. ед.)}.$$

Компании целесообразно использовать стратегию A_1 .

2. По критерию максимума получаем:

$$\max_i \max_j a_{ij} = \max \{77 500, 85 850\} = 85 850 \text{ (ден. ед.)}.$$

Компании целесообразно использовать стратегию A_2 .

3. Применим критерий Гурвица с $\alpha = 0,4$, тогда:

для стратегии A_1 :

$$\alpha \min a_{1j} + (1 - \alpha) \max a_{1j} = 0,4 \cdot 16 500 + (1 - 0,4) \cdot 77 500 = 53 100 \text{ (ден. ед.)};$$

для стратегии A_2 :

$$\alpha \min a_{2j} + (1 - \alpha) \max a_{2j} = 0,4 \cdot 8150 + (1 - 0,4) \cdot 85 850 = 54 770 \text{ (ден. ед.)};$$

Так как

$$\max \{53 100, 54 770\} = 54 770 \text{ (ден. ед.)},$$

компании целесообразно использовать стратегию A_2 .

4. Применим критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце — 77 500, во втором — 85 850. Элементы матрицы рисков находятся по формуле $r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}$:

$$r_{11} = 77 500 - 77 500 = 0, \quad r_{12} = 85 850 - 16 500 = 69 350,$$

$$r_{21} = 77 500 - 8150 = 69 350, \quad r_{22} = 77 500 - 77 500 = 0.$$

Матрица рисков имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 69\,350 \\ 69\,350 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\min_i \max_j r_{ij} = \min \{69\,350, 69\,350\} = 69\,350 \text{ (ден. ед.)}.$$

Следовательно, компании все равно, какую стратегию выбрать.

По отдельности каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для принятия окончательного решения, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия тех или иных управленческих решений.

При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть для рассматриваемой задачи известно, что теплая и холодная погода равновероятны и вероятности равны 0,5. Тогда компания может выбрать смешанную оптимальную стратегию, которая определяется так:

$$\begin{aligned} \max \{ (0,5 \cdot 77\,500 + 0,5 \cdot 16\,500), (0,5 \cdot 8150 + 0,5 \cdot 85\,850) \} = \\ = \max \{ 47\,000, 47\,000 \} = 47\,000 \text{ (ден. ед.)}. \end{aligned}$$

Компания может использовать любую стратегию.

Таким образом, прогнозирование динамики экономической конъюнктуры с помощью экономико-математических методов позволяет найти оптимальную стратегию компании на рынке в переходные периоды, что способствует повышению эффективности ее деятельности в условиях неопределенности и риска.

4.4.5. Кооперативные игры

Игроки могут выигрывать и проигрывать одновременно, их интересы могут быть не полностью противоположными, а поведение игроков становится более разнообразным. Такая ситуация весьма характерна для рыночных отношений.

В игре с ненулевой суммой желательно координировать свои действия с партнером либо каким-то образом влиять на его действия. Игры с ненулевой суммой могут быть *кооперативными* (в сообществе) и *некооперативными* (игроки принимают решения независимо друг от друга).

В некооперативных играх важным моментом является определение точек равновесия игры. Вообще понятие равновесия в теории игр шире понятия

оптимизации, которая представляет собой частный случай равновесия. В общем случае пара стратегий $x_{\text{опт}}$ и $y_{\text{опт}}$ для игроков 1 и 2 называется *точкой равновесия по Нэшу**, если ни один из игроков не может улучшить свое положение при неизменной стратегии другого игрока, т.е. для любых x, y

$$a_1(x, y_{\text{опт}}) \leq a_1(x_{\text{опт}}, y_{\text{опт}}), \quad a_2(x_{\text{опт}}, y) \leq a_2(x_{\text{опт}}, y_{\text{опт}}).$$

Пример 37. Определить точки равновесия для игры с матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} (4, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 4) \end{pmatrix}$$

Решение. Нетрудно видеть, что в этой игре игроку 1 (2) невыгодно отклоняться от 1-й (2-й) стратегии, если ее придерживается игрок 2 (1).

В теории игр доказано, что для любой конечной некооперативной игры с ненулевой суммой всегда существует по крайней мере одна равновесная пара смешанных стратегий; в общем случае равновесное решение может быть не единственным, причем каждому из них могут соответствовать разные значения выигрышей у игроков.

В случае кооперативной игры с двумя игроками предполагается, что игроки не могут воздействовать друг на друга до тех пор, пока не придут к некоторому соглашению.

В этом случае игра (вернее, ее исходы) представляется как множество S на плоскости общих выигрышей a_1 и a_2 (рис. 4.57). Задаются значения выигрышей T_1 и T_2 , которые могут получить соответственно 1-й и 2-й игроки без кооперации с партнером. Предполагая, что множество S является выпуклым, замкнутым и ограниченным сверху, можно доказать, что оптимальные решения находятся на правой верхней границе данного множества.

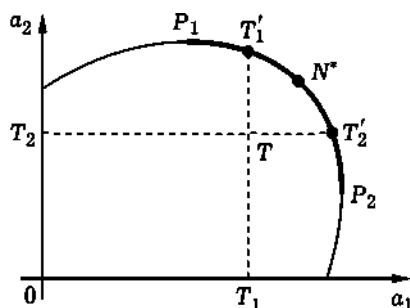


Рис. 4.57

На этой границе выделяется множество P *парето-оптимальных решений***, на котором увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша его партнера. На множество P точками T_1' и T_2' ограничено переговорное множество N ; оно характерно тем, что игрокам нет смысла вести переговоры относительно решений вне его, так как положение одного из игроков может быть либо улучшено без ущерба для партнера,

* Джон Нэш (р. 1928) — американский экономист и математик.

** Вильфредо Парето (1848–1923) — итальянский экономист и социолог.

либо игрок может достичь большего выигрыша в одиночку. На переговорном множестве выделяется точка N^* , соответствующая равновесию по Нэшу, — точка Нэша; в ней достигается максимум произведения

$$\max(a_1 - T_1)(a_2 - T_2),$$

в котором сомножители представляют собой превышения выигрышей каждого из игроков над платежами, которые могут быть получены игроками без операции.

Точка Нэша является одним из возможных решений кооперативной игры, наиболее привлекательных для партнеров.

Пример 38. Кооперативная игра дается матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} (8, 2) & (0, 0) \\ (4, 4) & (2, 8) \end{pmatrix}$$

Найти основные характеристики игры.

Решение. На плоскости $a_1 O a_2$ множеством S , определяющим игру, является треугольник с вершинами, данными в матрице: $O(0; 0)$, $A(2; 8)$, $B(8; 2)$;

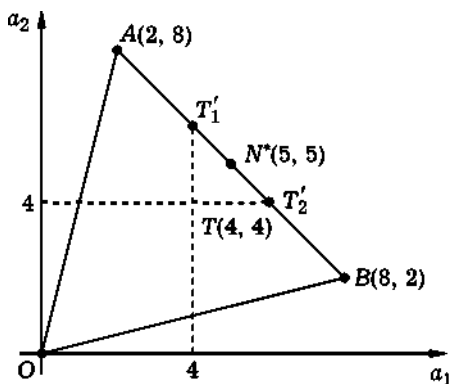


Рис. 4.58

это множество является выпуклым (рис. 4.58). Сторона AB этого треугольника представляет собой парето-оптимальное множество: увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счет уменьшения выигрыша партнера. Точка $T(4; 4)$ определяет выигрыши, которые игроки могут получить без взаимодействия с партнером. Переговорное множество N (отрезок, соединяющий точки T_1' и T_2') лежит на линии AB . На этой линии находится точка

Нэша $N^*(5; 5)$ — в ней произведение $(a_1 - 4)(a_2 - 4)$ для точек $\max\{a_1, a_2\}$, лежащих вне множества N , принимает наибольшее значение.

4.4.6. Позиционные игры

Игры, в которых задается последовательность принятия решений игроками, называются *позиционными*. В них могут принимать участие два игрока и более. Если в ранее рассмотренных случаях полагалось, что игроки принимают решения одновременно, не зная о решении партнера, то в данном случае игрок принимает решение, уже зная о решении партнера (соперника), т.е. в ответ

на его решение. К позиционным многошаговым играм двух лиц, где игроки принимают решения, зная о всех предыдущих решениях партнера, относятся, например, шахматы и шашки.

Позиционную игру, в силу особенности ее структуры, наглядно представляет дерево решений (в общем случае — граф решений), приводящее игроков из исходной позиции в одну из конечных. Вершины дерева игры называются *позициями*; позиции, непосредственно следующие за некоторой позицией, — *альтернативами*; позиции, не имеющие альтернатив, — *окончательными*, а ведущие в них пути — *партиями*. Часть дерева решений, описывающую игру из некоторой позиции (которая может считаться начальной), называют *подыгрой*. Всю игру подчас можно разбить на ряд подыгр, их решения представляют собой самостоятельные задачи. Примером подыгры являются шахматные этюды.

Позиционные игры моделируют поведение компаний в условиях рынка, и поэтому данный класс игр широко используется в экономике.

Рассмотрим анализ рыночного поведения двух компаний на примере игры «Вступление на рынок».

Пример 39. Пусть на рынке доминирует производитель — компания 1, и монопольное положение приносит ей прибыль 10 млн ден. ед. Компания 2 решает вопрос о вступлении на этот рынок при следующих известных предположениях.

В случае вступления компании 2 на рынок компания 1 может отреагировать одним из следующих способов:

1) снизить объем производства и поделить с компанией 2 свою прибыль по 5 млн ден. ед. на каждого конкурента;

2) сохранить объем производства; тогда прибыль компании 1 понизится до 3 млн ден. ед. вследствие снижения рыночной цены, а компания 2 понесет убытки в размере 2 млн ден. ед. тоже из-за падения рыночной цены на товар, а также из-за того, что предварительные затраты на проработку рынка и организацию производства не будут компенсированы.

Если же компания 2 воздерживается от вступления на рынок, то она ничего не выигрывает и не проигрывает, т.е. ее прибыль будет нулевой. В этом случае у компании 1 по-прежнему остаются два варианта поведения: не снижать объем производства и получить прибыль 10 млн ден. ед. или снизить объем производства со снижением прибыли до 8 млн ден. ед.

Эта конечная неантагонистическая игра двух партнеров может быть описана матрицей выигрышей:

Стратегия компании 2	Стратегия компании 1	
	сохранить	снизить
Вступить	(3, -2)	(5, 5)
Не вступить	(10, 0)	(8, 0)

Вместе с тем эту игру можно представить деревом решений, ветви которого соответствуют решениям партнеров, а выигрыши игроков указаны около каждой из висячих вершин (рис. 4.59).

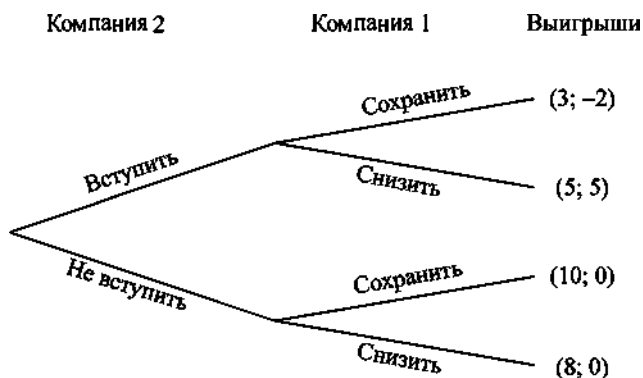


Рис. 4.59

Эта игра имеет две пары стратегий (две партии), приводящих к равновесию по Нэшу; при отказе компании 2 от вступления на рынок компания 1 не меняет объем производства; при вступлении компании 2 на рынок компания 1 снижает объем производства.

В непозиционной игре, когда игроки принимают решения одновременно и независимо друг от друга, реализация обеих стратегий была бы равновероятна. В позиционной игре необходимо учитывать, что компания 1 принимает решение, уже зная о решении компании 2. Согласно принципу максимина компании 2 следовало бы отказаться от вступления на рынок: в этом случае ее прибыль составила бы 0 млн ден. ед., а это больше, чем -2 млн ден. ед. в случае вступления компании на рынок. Однако здесь не учитывается предположение о рациональном поведении игроков, основой которого является стремление к максимизации своих выигрышей — в данном случае прибыли.

С учетом этого обстоятельства более рациональной стратегией компании 1 при вступлении компании 2 на рынок является снижение производства, так как прибыль 5 млн ден. ед. больше, чем прибыль 3 млн ден. ед. Именно эта партия наиболее вероятна для реализации, когда компания 2 вступит на рынок.

Приведенный пример — случай так называемой *неустойчивой монополии*, когда компания-монополист не в состоянии эффективно противостоять внедрению конкурента на рынок.

Возможен и вариант *устойчивой монополии*, когда компания-монополист в силу условий организации своего производства в состоянии эффективно противостоять появлению потенциальных соперников на рынке.

Упражнения

4.1. Составить сетевой график выполнения работ и рассчитать временные параметры по данным, представленным в табл. 4.17.

Таблица 4.17

Содержание работы	Обозначение	Предыдущая работа	Продолжительность, дней
Составление сметы	a_1		10
Заказ и доставка оборудования	a_2	a_1	15
Распределение кадров	a_3	a_1	5
Установка оборудования	a_4	a_2	20
Подготовка кадров	a_5	a_3	9
Оформление торгового зала	a_6	a_4	8
Доставка товаров	a_7	a_5	7
Заказ и получение ценников	a_8	a_5	5
Заказ и получение формы	a_9	a_5	6
Выкладка товаров	a_{10}	a_6, a_7	3
Заполнение ценников	a_{11}	a_8	4
Генеральная репетиция	a_{12}	a_9, a_{10}, a_{11}	2

4.2. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ при нормальном режиме, критический путь и минимальную стоимость работ при максимальном режиме. Исходные данные указаны в табл. 4.18.

Таблица 4.18

Операция	Нормальный режим работ		Максимальный режим работ	
	Продолжительность, дней	Стоимость, ден. ед.	Продолжительность, дней	Стоимость, ден. ед.
1,2	4	80	2	150
1,3	2	50	1	70
1,4	3	60	2	80
2,4	2	60	1	70
2,6	6	100	3	160
3,4	2	40	1	60
3,5	3	70	2	90
4,6	4	90	2	170
5,6	4	80	2	160

4.3. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ при нормальном режиме, критический путь и минимальную стоимость работ при максимальном режиме. Необходимые исходные данные приведены в табл. 4.19.

4.4. Для улучшения финансового состояния фирме необходимо увеличить спрос на выпускаемый цемент марки М400 и расширить потребительский рынок. Фирма считает целесообразным размещать цемент в специализированной таре. Для переоснащения

Таблица 4.19

Операция	Нормальный режим работ		Максимальный режим работ	
	Продолжительность, дней	Стоимость, ден. ед.	Продолжительность, дней	Стоимость, ден. ед.
1,2	5	110	4	130
1,3	3	70	2	90
1,4	2	50	1	60
2,5	3	60	2	80
2,6	4	80	2	110
3,6	2	60	1	70
4,7	6	110	4	150
5,7	3	70	2	80
6,7	5	100	2	150

цеха необходимо установить оборудование по производству специализированной тары. Предполагается выполнить следующее:

- 1) подготовку и выпуск технического задания на переоборудование цеха (20 дней);
- 2) разработку мероприятий по технике безопасности (25 дней);
- 3) подбор кадров (10 дней);
- 4) заказ и поставку необходимого оборудования (30 дней);
- 5) заказ и поставку электрооборудования (40 дней);
- 6) установку оборудования (50 дней);
- 7) установку электрооборудования (45 дней);
- 8) обучение персонала (15 дней);
- 9) испытание и сдачу в эксплуатацию линии (25 дней).

Ожидается, что производительность вводимой линии по производству тары составит 4000 мешков в день при односменном режиме работы. Стоимость одного мешка — 25 ден. ед., выручка от реализации тары в смену составит 100 тыс. ден. ед., из которых чистая прибыль фирмы равна 50 тыс. ден. ед. Деньги на покупку оборудования и переоснащение цеха в размере 5500 тыс. ден. ед. взяты в банке под 30% годовых из расчета 5000 тыс. ден. ед. на оборудование и 500 тыс. ден. ед. на его установку.

Затраты на проведение работ и их продолжительность в нормальном и максимальном режимах указаны в табл. 4.20.

Таблица 4.20

Работа	Нормальный режим работы		Максимальный режим работы	
	Продолжительность, дней	Затраты, тыс. ден. ед.	Продолжительность, дней	Затраты, тыс. ден. ед.
1	20	20	18	26
2	25	30	20	37
3	10	5	9	7
4	30	60	23	64
5	40	65	32	78
6	50	90	43	100
7	45	80	41	85
8	15	5	9	10
9	25	50	21	57

Составить график проведения работ, определить критический путь и стоимость работ на переоборудование цеха при нормальном режиме работ.

Провести «сжатие» работ, определить, через какое время после начала выпуска тары фирма может вернуть кредит банку и минимальную суммарную стоимость работ.

4.5. Автотранспортному предприятию предстоит освоить новый маршрут между городами A и B . На рис. 4.60 представлены различные маршруты следования из A в B , проходящие через несколько других поселков. Расстояния указаны числами в километрах около стрелок. Определить кратчайший маршрут следования автобусов из города A в город B .

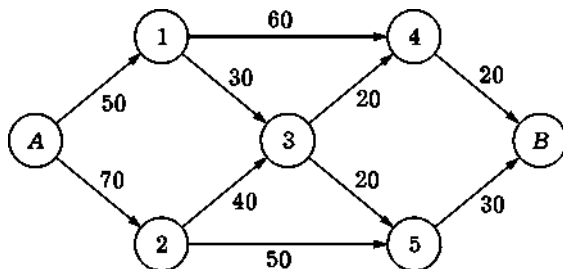


Рис. 4.60

4.6. Пожарной службе необходимо определить кратчайший путь от гаража (пункт A) до нефтеперерабатывающего завода (пункт B) по данным (в км), указанным на рис. 4.61.

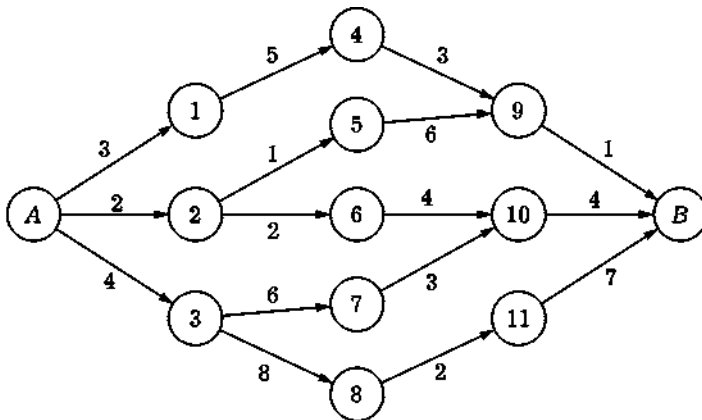


Рис. 4.61

4.7. Строительной фирме необходимо проложить водопроводные трубы к девяти объектам, на которых она ведет строительство. Числа на ребрах указывают длину труб в метрах. Узел 1 — подключение к водопроводной трассе. Отсутствие ребра между двумя узлами означает, что соединение соответствующих объектов невозможно (рис. 4.62). Найти такое соединение узла 1 с объектами строительства, чтобы суммарная длина трубопроводов была минимальной.

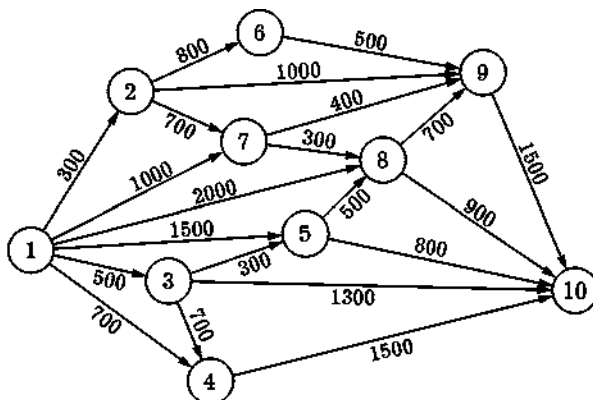


Рис. 4.62

4.8. Фирма по прокату видео-и стереокассет планирует их замену на очередные 5 лет. Партия кассет должна эксплуатироваться не менее одного года, прежде чем ее заменяют. На рис. 4.63 приведены стоимости замены партии кассет в тыс. ден. ед., зависящие от времени замены и числа лет, в течение которых кассеты находятся в эксплуатации. Определить план замены кассет, обеспечивающий фирме минимальные расходы.

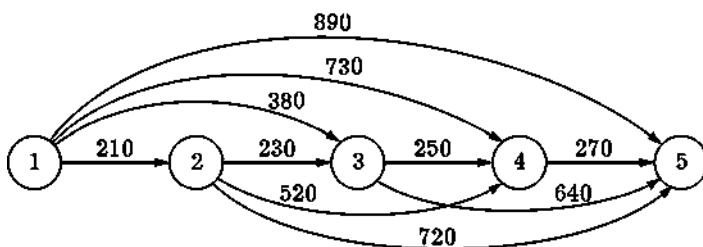


Рис. 4.63

4.9. Фирма может принять решение о строительстве среднего и малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправдано при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,75 и 0,25 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 5 млн ден. ед., малого — в 1 млн ден. ед. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в 4,2 млн ден. ед.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 1 млн ден. ед. (0,3 млн ден. ед.);
- малое предприятие при низком спросе дает 0,2 млн ден. ед.;

- малое предприятие при высоком спросе дает 0,25 млн ден. ед. в течение 10 лет;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,9 (0,2) млн ден. ед.;
- малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает 0,2 млн ден. ед. в год за остальные восемь лет.

Используя дерево решений, определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

4.10. Инвестиционной компании предлагаются три проекта, имеющие разную степень риска, с заданными реализациями поступления денежных средств (табл. 4.21). Необходимо:

- изобразить количественные расчеты на плоскости «ожидаемое среднее поступление — риск».
- определить, какой проект следует выбрать компании (ответ обосновать);
- решить предыдущую задачу с дополнительным условием: у инвестиционной компании имеется долг банку в размере 70 млн руб.

Решение задачи выполнить с использованием дерева решений.

Таблица 4.21

	Проект 1			Проект 2			Проект 3		
Вероятность события	0,2	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4
Сумма поступлений, млн руб.	40	50	60	0	50	100	20	40	70

4.11. В табл. 4.22 даны некоррелированные доходности r_i и стандартные отклонения σ_i для инвестиционного портфеля банка, состоящего из 10 пакетов ценных бумаг, а также доли x_i этих пакетов в портфеле (i — номер пакета ценных бумаг).

а. Найти ожидаемую доходность и ее стандартное отклонение как суммарный риск портфеля.

б. Если вы склонны к риску, какие три вида ценных бумаг вы бы поместили на три последние позиции в указанной таблице? Рассчитать в этом случае ожидаемую доходность и ее стандартное отклонение.

Таблица 4.22

Параметры, %	Номера пакетов ценных бумаг									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	9	9	12	10	10	10	20	10	5	5
r_i	15	15	18	12	25	20	10	28	30	40
σ_i	8	8	10	7	12	10	5	15	18	25

4.12. Дежурный МЧС имеет пять телефонов. В среднем за 1 ч поступает 90 телефонных звонков, средняя продолжительность разговора 2 мин. Определить показатели эффективности работы дежурного.

4.13. На автомобильной стоянке возле магазина есть три парковочных места. В среднем в 1 ч приезжают 20 машин, продолжительность пребывания на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается. Определить

среднее количество незанятых мест и вероятность того, что вновь прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.

4.14. АТС компании может обеспечить не более пяти разговоров одновременно. Средняя продолжительность одного разговора 1 мин. На АТС поступает в среднем 10 вызовов в 1 мин. Определить показатели эффективности работы АТС.

4.15. В грузовой порт приходит в среднем шесть сухогрузов в сутки. Их обслуживают три крана, каждый из которых тратит в среднем на одно судно 8 ч. Разгрузка-погрузка идет круглосуточно. Определить показатели эффективности работы порта.

4.16. В пункте службы 911 дежурят круглосуточно три диспетчера. Если телефон диспетчера занят, то абонент получает отказ. В среднем на пульт поступает четыре вызова в минуту, оформление одной заявки занимает в среднем 1,5 мин. Найти основные показатели работы пункта и определить, сколько потребуется диспетчеров для удовлетворения не менее 90% вызовов.

4.17. В салоне работают четыре мастера по обслуживанию клиентов. В среднем в час в салон обращаются пять человек. Если все мастера заняты, то клиенты становятся в очередь на улице. В среднем на обслуживание одного клиента мастер тратит 40 мин. Найти среднюю длину очереди.

4.18. На АЗС работают две заправочные колонки со средним временем обслуживания 2 мин на машину. Около АЗС находится площадка на две машины для ожидания, если обе колонки заняты. Если заняты обе колонки и оба места на стоянке, то вновь прибывающая машина уезжает. В среднем каждые 3 мин. прибывает машина. Найти основные показатели эффективности работы АЗС.

4.19. В отделении банка на обслуживании работают два операциониста. Среднее время обслуживания одного клиента 4 мин. В банк в среднем обращаются три человека в минуту. По условиям безопасности в помещении могут находиться одновременно не более семи человек. Если помещение заполнено, то очередной клиент уходит, не дожидаясь обслуживания. Найти вероятность того, что пришедший клиент уйдет необслуженным.

4.20. На железнодорожной станции работают два кассира. Средняя интенсивность потока пассажиров равна 0,9 чел./мин. На обслуживание одного пассажира кассир в среднем тратит 2 мин. Найти среднее число пассажиров у касс и среднее время, затрачиваемое пассажиром на приобретение билета.

4.21. В операционном отделе банка работают три операциониста по обслуживанию клиентов. В среднем в банк обращаются 20 клиентов в час. По условиям внутренней безопасности банка в операционном отделе может одновременно находиться не более шести клиентов; если там уже находятся шесть клиентов, то вновь приходящий клиент не обслуживается и покидает банк. Определить:

а) сколько в среднем из каждых 100 клиентов принимается к обслуживанию, если операционист обслуживает в час шесть человек;

б) сколько нужно дополнительно операционистов, чтобы из каждых 100 обращающихся в банк клиентов принимались к обслуживанию не менее 95;

в) какова должна быть производительность операциониста, чтобы в среднем из каждых 100 обращающихся в банк клиентов принимались к обслуживанию не менее 95;

г) какой из вариантов «б» или «в» выгоднее для банка при условии, что обслуживается не менее 95% клиентов, заработная плата операциониста в варианте «б» составляет 500 долл./мес, а доплата за квалификацию при интенсивном обслуживании по варианту «в» равна 300 долл./мес.

Для всех случаев рассчитать основные характеристики работы операционного отдела: среднее число занятых операционистов, среднюю длину очереди, среднее число клиентов в операционном отделе, среднее время пребывания клиента в очереди и в обслуживании.

В задачах 4.22–4.26 найти решение матричной игры с заданной матрицей; определить оптимальные стратегии и цену игры.

$$\begin{aligned}
 4.22. A &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, & 4.24. A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, & 4.25. A &= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \\
 4.23. A &= \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}, & 4.26. A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

4.27. Организация планирует выпуск трех партий новых видов товаров широкого потребления в условиях неясной рыночной конъюнктуры. Известны отдельные возможные состояния P_1, P_2, P_3, P_4 , а также возможные объемы выпуска изделий по каждому варианту и их условные вероятности, которые представлены в табл. 4.23. Определить предпочтительный план выпуска товаров широкого потребления.

Таблица 4.23

Товар	Объем выпуска товаров при различных состояниях рыночной конъюнктуры			
	P_1	P_2	P_3	P_4
T_1	0,4 2,2	0,1 3,8	0,2 2,8	0,3 3,2
T_2	0,3 2,6	0,2 2,4	0,1 3,1	0,4 3,3
T_3	0,2 3,0	0,3 2,0	0,2 1,8	0,3 2,5

4.28. Компания производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты компании в течение августа — сентября на единицу продукции составили: платья — 7 ден. ед., костюмы — 28 ден. ед. Цена реализации составляет 15 и 50 ден. ед. соответственно.

По данным наблюдений, за несколько предыдущих лет компания может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде — 630 платьев и 1050 костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию компании в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции.

Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЯХ

В настоящее время заметно возрос интерес к финансовой сфере деятельности, однако далеко не все заинтересованные лица могут провести необходимые финансовые расчеты, особенно в тех случаях, когда анализируются платежи, разнесенные во времени или представляющие собой последовательность регулярно повторяющихся выплат. До недавнего времени в российском обществе практически не использовались векселя, акции и другие ценные бумаги. Большинство людей пока еще мало информировано о разнообразных формах получения процентных денег. В связи с этим представляется целесообразным рассмотрение математических моделей в финансовых операциях.

Любая финансовая, кредитная или коммерческая операция предполагает совокупность условий, согласованных ее участниками. К таким условиям относятся: сумма кредита, займа или инвестиций, цена товара, сроки, способы начисления процентов, погашения долга и т.д.

Совокупное влияние на финансовую операцию многих факторов делает ее результат неочевидным. Для его оценки необходим специальный количественный анализ. Совокупность математических моделей расчета и составляет предмет изучения данной главы.

Под *экономико-математической моделью* понимают математическое описание экономического процесса, произведенное в целях его исследования и управления*.

В настоящей главе приводятся математические модели финансовых операций, необходимые для анализа сделок, содержащих три основных элемента: размер платежа, срок и ставка процентов.

Количественный финансовый анализ имеет целью решение широкого круга задач: от элементарного начисления процентов до анализа сложных кредитных и коммерческих операций. К этому кругу задач можно отнести:

- измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих в ней сторон;
- сравнение эффективности различных операций;
- выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции, сделки, контракта;
- разработку планов выполнения финансовых операций;
- расчет параметров эквивалентного изменения условий контракта.

Рассматриваются основные понятия, которыми оперируют в финансовых вычислениях: процент, ставка процента, учетная ставка, современная (те-

* Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – М.: Дело, 1993.

кущая) стоимость платежа; методы наращивания и дисконтирования платежей; принципы, лежащие в основе финансовых вычислений; современная практика расчетов.

В главу вошли также основы количественного анализа последовательности (потоков) платежей, в частности финансовой ренты (аннуитетов). Потоки денежных платежей часто встречаются на практике, например, регулярные взносы для формирования какого-либо фонда (инвестиционного, страхового, пенсионного, для погашения долга), периодическая уплата процентов, доходы по облигациям или ценным бумагам, выплата пенсий, поступление доходов от коммерческой или предпринимательской деятельности, налоговые платежи. Кроме того, анализируются методы расчета, разработанные для анализа различных видов финансовой ренты (в том числе с переменными размерами платежей).

Все эти модели и методы могут быть применены в расчетах любых финансовых операций: в анализе инвестиционных проектов, расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности предпринимательской деятельности, работе с ценными бумагами, в страховом деле.

Следует отметить, что развитием и систематизацией математических моделей финансовых операций, их внедрением в практику и образованием занимались еще в дореволюционной России.

Так, профессор Н.С. Лунский разработал программу курса «Высшие финансовые вычисления» и выпустил ряд первоклассных учебников для ее реализации. Однако по мере строительства планового социалистического хозяйства в СССР значимость блока финансовых дисциплин была существенно принижена. Курс финансовых вычислений был выхолощен.

В связи со сказанным повышение уровня знаний математических моделей в финансово-аналитической подготовке экономистов является необходимым условием развития России на пути рыночных отношений.

5.1. Проценты и процентные ставки

5.1.1. Простые проценты

В практических финансовых и коммерческих операциях денежные суммы обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств, их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется *принципом неравноценности денег*, относящихся к разным моментам времени, так как даже при отсутствии

инфляции и риска 1 тыс. руб., полученных через год, не равноценна этой же сумме, поступившей сегодня. Неравноценность объясняется тем, что теоретически любая денежная сумма может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы в свою очередь могут быть реинвестированы и т.д. Поэтому сегодняшние деньги ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем современные.

Очевидным следствием принципа неравноценности денег является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь тогда, когда фактор времени не имеет значения, например, в бухгалтерском учете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

В финансовых вычислениях фактор времени учитывается в качестве одного из важнейших элементов с помощью начисления процентов.

Процентные ставки. Под *процентными деньгами*, или *процентами*, в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещении денег на сберегательный счет, учета векселя, покупки сберегательного сертификата или облигаций и т.д.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере *процентной ставки* — отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют *периодом начисления*. Ставка измеряется в процентах или представляется в виде десятичной либо натуральной дроби.

Проценты начисляют, как правило, дискретно, т.е. в отдельные моменты времени, причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять *непрерывные проценты*.

Проценты или выплачиваются кредитору по мере их начисления, или присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением*.

В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращивания суммы долга, но и в более широком смысле — как измеритель степени доходности финансовой операции.

Существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контракта. Соответственно используют различные виды процентных ставок, одно из основных различий между которыми связано с выбором исходной суммы для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме

с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются *простыми*, а во втором — *сложными процентными ставками*.

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть *постоянными* или *переменными* («плавающими»). Во втором случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней, которую называют *маржой*. Размер маржи определяется рядом условий, например сроком операции, обычно он находится в пределах 0,5–5%. В контракте может оговариваться и переменный во времени размер маржи.

Часто в коммерческих расчетах используют понятия проценты «со 100», «на 100», «во 100».

Процентами «со 100» называют отношение суммы процентных денег (I) к наращенной сумме (S).

Процентами «на 100» называют отношение суммы процентных денег (I) к первоначальной сумме (P).

Процентами «во 100» называют отношение суммы процентных денег (I) к разности между первоначальной суммой P и суммой процентных денег I .

Рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

Формула наращения по простым процентам. Под *наращенной суммой* ссуды (долга, депозита и т.д.) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P — первоначальная сумма денег, i — ставка простых процентов. Начисленные проценты за один период равны Pi , а за n периодов — Pni .

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами можно представить в виде арифметической прогрессии, членами которой являются величины

$$P, \quad P + Pi = P(1 + i), \quad P(1 + i) + Pi = P(1 + 2i), \quad \dots, \quad P(1 + ni).$$

Первый член этой прогрессии равен P , разность — Pi , тогда последний член является наращенной суммой:

$$S = P(1 + ni). \quad (5.1)$$

Формула (5.1) называется *формулой наращения по простым процентам*, или *формулой простых процентов*, а множитель $1 + ni$ в этой формуле — *множителем наращения*. Он показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы.

Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы P и суммы процентов I :

$$S = P + I, \quad (5.2)$$

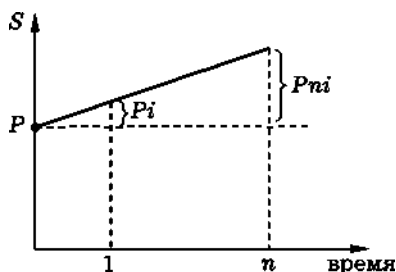


Рис. 5.1

где

$$I = Pni. \quad (5.3)$$

Процесс роста наращенной суммы по простым процентам представим графически (рис. 5.1). При начислении простых процентов по ставке i за базу берется первоначальная сумма долга. Нарощенная сумма S изменяется линейно в зависимости от времени.

Пример 1. Определить сумму процентов и накопленного долга, если ссуда 200 тыс. руб. взята на полгода при ставке простых процентов, равной 12% годовых. По имеющимся исходным данным найти проценты «со 100», «на 100», «во 100».

Решение. $I = Pni = 200 \cdot 0,5 \cdot 0,12 = 12$ (тыс. руб.).

$S = P + I = 200 + 12 = 212$ (тыс. руб.).

Проценты «со 100» = $I/P = 12/200 = 0,06$.

Проценты «на 100» = $I/S = 12/212 = 0,0566$.

Проценты «во 100» = $I/(P - I) = 12/188 = 0,0638$.

Таким образом, сумма процентов составляет 12 тыс. руб., сумма накопленного долга — 212 тыс. руб.

Начисление простых процентов. Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях: при заключении краткосрочных контрактов (предоставлении краткосрочных кредитов и т.п.), срок которых не превышает одного года, и когда проценты не присоединяются к сумме долга, а выплачиваются периодически.

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете на год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого величину n выражают в виде дроби:

$$n = \frac{t}{K}, \quad (5.4)$$

где n — срок ссуды в долях года; K — число дней в году (временная база); t — срок ссуды в днях.

В таком случае наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P \left(1 + \frac{it}{K} \right). \quad (5.5)$$

Возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся временной базой K и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют *обыкновенный*, или *коммерческий*, процент. В отличие от него *точный процент* получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366 (если год високосный).

Число дней пользования ссудой также может быть *точным* или *приближенным*. В первом случае вычисляют фактическое количество дней между двумя датами, во втором — продолжительность ссуды определяют по числу месяцев и дней ссуды, считая все месяцы равными и содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считаются за один день. Точное число дней между двумя датами можно подсчитать самостоятельно или с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году (см. табл. 10 и 11 Приложения).

Различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды приводят к следующим применяемым на практике схемам расчета процентов:

- точные проценты с точным числом дней ссуды (британская схема 365/365, когда в году считается 365 дней, полугодие приравнивается к 182 дням и берется точная длительность месяцев). Используется в Великобритании, США, Португалии;

- обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (французская схема 365/360, год принимается равным 360 дням и учитывается точная длительность месяцев). Используется во Франции, Бельгии, Испании;

- обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская схема 360/360, считается, что в году 360 дней, а в каждом месяце 30 дней). Используется в Германии, России, США.

Поскольку точное число дней ссуды, как правило, больше приближенного, проценты с точным числом дней обычно выше, чем с приближенным.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

Точное и приближенное число дней для обыкновенных процентов связаны следующими зависимостями:

$$i_{360} = 0,986301 \cdot i_{365}; \quad i_{365} = 1,013889 \cdot i_{360}.$$

Пример 2. Найти точное и приближенное число дней между 5 марта и 28 сентября.

Решение. По табл. 10 Приложения находим, что 28 сентября является 271-м днем, а 5 марта — 64-м днем года. Поэтому точное число дней составляет:

$$271 - 64 = 207 \text{ (дней)}.$$

Найдем приближенное число дней между 5 марта и 28 сентября. Количество полных месяцев равно 5. Поэтому имеем

$$5 \cdot 30 + (30 - 5) + 28 = 203 \text{ (дня)}.$$

Таким образом, между 5 марта и 28 сентября точное число дней 207, а приближенное — 203.

Пример 3. Ссуда в размере 3000 руб. положена в банк под 10% годовых с 3 апреля по 29 ноября следующего года (год не високосный). Определить тремя способами наращенную сумму. Какой вариант наращения выгоден банку, а какой вкладчику?

Решение. Наращенную сумму найдем по формуле (5.5). Рассмотрим различные варианты расчета.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды. Точное количество дней — 605, временная база — 365 дней, тогда

$$S_1 = 3000 \left(1 + \frac{0,1 \cdot 605}{365} \right) = 3497,3 \text{ (руб.)}.$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. Точное количество дней — 605, временная база — 360 дней, тогда

$$S_2 = 3000 \left(1 + \frac{0,1 \cdot 605}{360} \right) = 3504,2 \text{ (руб.)}.$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды. Приближенное число дней — 596, временная база — 360, тогда

$$S_3 = 3000 \left(1 + \frac{0,1 \cdot 596}{360} \right) = 3496,7 \text{ (руб.)}.$$

Следовательно, банку выгоден третий вариант расчета наращения, а вкладчику — второй.

Простые переменные ставки. Процентные ставки не всегда остаются неизменными во времени: иногда в кредитных соглашениях предусматриваются дискретно изменяющиеся процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_k i_k) = P \left(1 + \sum_{t=1}^k n_t i_t \right), \quad (5.6)$$

где P — первоначальная сумма (ссуда); k — количество периодов начислений; i_t — ставка простых процентов в периоде с номером t , $t = \overline{1, k}$; n_t — продолжительность периода начисления процентов по ставке i_t , $t = \overline{1, k}$.

Пример 4. В договоре, рассчитанном на год, ставка простых процентов на I квартал установлена в размере 8% годовых, а на каждый последующий квартал на 0,5% меньше, чем в предыдущем. Определить множитель наращения $K_{\text{нар}}$ за весь срок договора.

Решение. Множитель наращения $K_{\text{нар}}$ определяем по формуле (5.6):

$$K_{\text{нар}} = 1 + \sum_{t=1}^4 n_t i_t = 1 + 0,25 \cdot 0,08 + 0,25 \cdot 0,075 + 0,25 \cdot 0,07 + 0,25 \cdot 0,065 = 1 + 0,25(0,08 + 0,075 + 0,07 + 0,065) = 1,0725.$$

Итак, множитель наращения равен 1,0725.

Реинвестирование по простым процентам. Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована под ту же или другую процентную ставку. Процесс реинвестирования может повторяться неоднократно в пределах расчетного срока N . В случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока N находится по формуле

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) \dots (1 + n_k i_k) = P \prod_{t=1}^k (1 + n_t i_t), \quad (5.7)$$

где n_t , $t = \overline{1, k}$, — продолжительности последовательных периодов реинвестирования, связанные соотношением $N = \sum_{t=1}^k n_t$; i_t , $t = \overline{1, k}$, — ставки, по которым производится реинвестирование.

Пример 5. На сумму 100 тыс. руб. начисляются 10% годовых. Проценты простые, точные (год не високосный). Определить наращенную сумму в двух случаях: если реинвестирование проводится за I квартал ежемесячно и если реинвестирование не проводится.

Решение. Вычислим наращенную сумму при реинвестировании:

$$S = 100 \left(1 + \frac{0,1 \cdot 31}{365} \right) \left(1 + \frac{0,1 \cdot 28}{365} \right) \left(1 + \frac{0,1 \cdot 31}{365} \right) = 102,486 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Определим наращенную сумму при отсутствии реинвестирования:

$$S = 100 \left(1 + \frac{0,1 \cdot 90}{365} \right) = 102,466 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Из результатов вычислений можно сделать вывод, что реинвестирование увеличивает наращенную сумму.

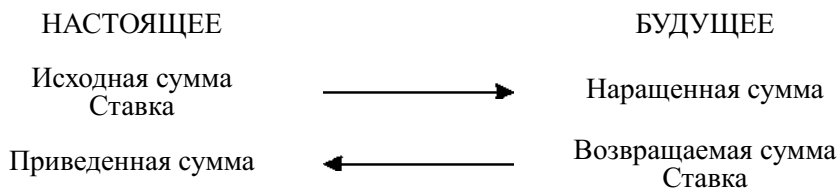
Дисконтирование и учет. На практике часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S , соответствующей моменту окончания финансовой операции, требуется найти исходную сумму P . Расчет P по S называют *дисконтированием суммы* S .

Величина P , найденная дисконтированием, называется *современной величиной*, или *текущей стоимостью* суммы S .

Проценты в виде разности $D = S - P$ называются *дисконтом*, или *Скидка*, *скидкой*. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Процесс начисления и удержания процентов вперед называют *учетом*. На практике используют два принципа расчета процентов: путем наращения суммы ссуды и устанавливая скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина P эквивалентна сумме S в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов эта величина в результате наращения станет равной S . Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Однако понятие приведения несколько шире, чем дисконтирование. *Приведение* — это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, а если к более поздней дате, то наращение. Схематически наращение и дисконтирование можно представить следующим образом:



Существуют два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче

$$S = P(1 + ni),$$

то в обратной

$$P = \frac{S}{1 + ni}. \quad (5.8)$$

Выражение $\frac{1}{1+ni}$ формулы (5.8) называют *дисконтным множителем*. Он показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга.

Дисконт (D) суммы S равен

$$D = S - P. \quad (5.9)$$

Пример 6. Заемщик получил от банка кредит на 8 месяцев под 20% простых годовых с условием вернуть 500 тыс. руб. Какую сумму получил заемщик в момент заключения договора и чему равен дисконт?

Решение. По формуле (5.8) найдем сумму, которую получил заемщик в момент заключения договора:

$$P = \frac{S}{1+ni} = \frac{500}{1+0,2 \cdot 2/3} = 441,176 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Дисконт составит:

$$D = S - P = 500 - 441,176 = 58,824 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Следовательно, в момент заключения договора заемщик получил 441,176 тыс. руб., дисконт банка равен 58,824 тыс. руб.

Банковский (коммерческий) учет. Операция учета, в том числе учета векселей, заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или иному платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по этому обязательству в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется *учетная ставка*, которую обозначим d .

Простая годовая учетная ставка находится по формуле

$$d = \frac{S - P}{Sn}. \quad (5.10)$$

Размер дисконта (учета), удерживаемого банком:

$$D = Snd, \quad (5.11)$$

поэтому

$$P = S - D = S - Snd = S(1 - nd). \quad (5.12)$$

Множитель $1 - nd$ называется *дисконтным множителем*. Срок n представляет собой период времени от момента учета векселя до даты его погашения в

годах. Дисконтирование по учетной ставке проводится в большинстве случаев при условии, что год равен 360 дням.

Пример 7. Владелец векселя на сумму 100 тыс. руб. со сроком уплаты 17 ноября учел его в банке 23 сентября по учетной ставке 8% годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя, приняв $K = 360$ дней.

Решение. До погашения векселя осталось 54 дня. Сумма, полученная владельцем векселя, рассчитывается по формуле (5.12):

$$P = S(1 - nd) = 100 \left(1 - \frac{0,08 \cdot 54}{360} \right) = 98,88 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Владелец векселя при учете его в банке получит 98,88 тыс. руб.

Учетную ставку можно использовать для наращивания, т.е. для расчета S по P . Из формулы (5.12) следует, что

$$S = \frac{P}{1 - nd}. \quad (5.13)$$

Сравнение ставки наращивания и учетной ставки. Операции наращивания и дисконтирования противоположны, но они могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае в зависимости от применяемой ставки различают прямую и обратную задачи (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Ставка	Прямая задача	Обратная задача
Наращивания i	Наращивание: $S = P(1 + ni)$	Дисконтирование: $P = \frac{S}{1 + ni}$
Учетная d	Дисконтирование: $P = S(1 - nd)$	Наращивание: $S = \frac{P}{1 - nd}$

Найдем зависимости процентной ставки i от учетной ставки d и наоборот. Приравняв выражения (5.8) и (5.13), имеем:

$$1 + ni = \frac{1}{1 - nd},$$

откуда

$$i = \frac{d}{1 - nd}, \quad (5.14)$$

$$d = \frac{i}{1 + ni}. \quad (5.15)$$

Совмещение начисления процентов по ставке наращивания и дисконтирования по учетной ставке. В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи:

- 1) определить конечную сумму долга на момент его погашения;
- 2) рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращивание по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2 = P_1(1 + n_1 i)(1 - n_2 d), \quad (5.16)$$

где P_1 — первоначальная сумма ссуды; P_2 — сумма, получаемая при учете обязательства; n_1 — общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты; n_2 — срок от момента учета до погашения долга.

Пример 8. Платежное обязательство уплатить через 60 дней 200 тыс. руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов $i = 15\%$ годовых, было учтено за 10 дней до срока погашения по учетной ставке $d = 12\%$. Определить сумму, получаемую при учете.

Решение. По формуле (5.16) имеем:

$$P_2 = 200 \left(1 + \frac{0,15 \cdot 60}{365} \right) \left(1 - \frac{0,12 \cdot 10}{360} \right) = 204,248 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Владелец платежного обязательства получит при учете 204,248 тыс. руб.

Отметим, что в примере при наращении использовалась временная база, равная 365 дней, а при дисконтировании — 360 дней.

Определение продолжительности ссуды. Иногда ставится задача по нахождению временного интервала, за который исходная сумма при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины, или по определению срока, обеспечивающего определенный дисконт с заданной величиной.

При использовании простой ставки наращивания i из (5.1) находим:

$$n = \frac{S - P}{Pi}, \quad (5.17)$$

где n — срок операции в годах.

При использовании учетной ставки d из (5.10) имеем:

$$n = \frac{S - P}{Sd}, \quad (5.18)$$

где n — оставшийся срок от учета до погашения долга в годах.

Выражения (5.17) и (5.18) определяют временной срок, измеряемый в годах, а простые ставки применяются в основном в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями. В этом случае срок финансовой операции в днях вычисляется как

$$t = nK, \quad (5.19)$$

где K — временная база.

Определение процентной ставки. Уровень процентной ставки является мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из формул (5.1), (5.5), (5.13) находим ставку наращения i и учетную ставку d :

$$i = \frac{S - P}{Pn}; \quad (5.20)$$

$$i = \frac{K(S - P)}{Pt}; \quad (5.21)$$

$$d = \frac{S - P}{Sn}; \quad (5.22)$$

$$d = \frac{K(S - P)}{St}. \quad (5.23)$$

Отметим, что срок n в этих формулах имеет разный смысл: в (5.20) и (5.21) это весь срок операции, а в (5.22) и (5.23) — срок, оставшийся до погашения.

Пример 9. Определить доходность операции для кредитора, если он предоставил ссуду в размере 200 тыс. руб. на 60 дней и контрактом предусмотрена сумма погашения долга, равная 210 тыс. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d . Временную базу K принять равной 360 дней.

Решение. По формуле (5.21) определим доходность операции в виде простой ставки процентов:

$$i = \frac{K(S - P)}{Pt} = \frac{360(210 - 200)}{200 \cdot 60} = 0,3.$$

По формуле (5.23) определим доходность операции в виде простой учетной ставки:

$$d = \frac{K(S - P)}{St} = \frac{360(210 - 200)}{210 \cdot 60} = 0,286.$$

Таким образом, доходность операции, выраженная в виде простой ставки, составляет 30%, а в виде простой учетной ставки — 28,6%.

5.1.2. Сложные проценты

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, иногда называют *капитализацией процентов*.

Формула наращения по сложным процентам. Пусть первоначальная сумма долга равна P , тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит $P(1+i)$, через два года — $P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2, \dots$, через n лет — $P(1+i)^n$.

Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов:

$$S = P(1+i)^n, \quad (5.24)$$

где S — наращенная сумма; i — годовая ставка сложных процентов; n — срок ссуды; $(1+i)^n$ — множитель (коэффициент) наращения, который обозначим $K_{\text{нар}}$.

На практике в большинстве случаев применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.).

Наращение по сложным процентам представляет собой рост по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен P , а знаменатель $1+i$.

Сравним коэффициенты наращения по простым и сложным процентам по ставке 20% годовых и временной базе 360 дней. Результаты расчета поместим в табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5.2

Коэффициент наращения	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет
$1+ni$	1,0167	1,1	1,2	2,0	3,0
$(1+i)^n$	1,0153	1,0954	1,2	2,4883	6,1917

Отметим, что при сроке операции менее года наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным процентам, а при сроке более года — наоборот.

Графически изменения коэффициентов наращения по простым и сложным процентам представлены на рис. 5.2.

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \dots (1+i_k)^{n_k}, \quad (5.25)$$

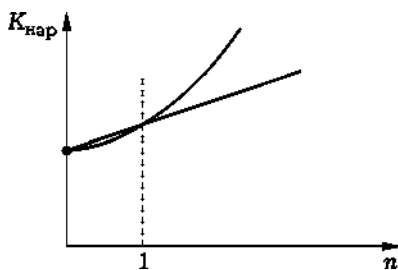


Рис. 5.2

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ — последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно.

Выражение $(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}$ — множитель (коэффициент) наращения.

Пример 10. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 15% годовых, плюс переменная маржа: 6% в первые два года, 8% в третий год, 10% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за четыре года.

Решение. Найдем множитель наращения:

$$K_{\text{нар}} = (1 + 0,21)^2(1 + 0,23)(1 + 0,25) = 2,25.$$

Множитель наращения за четыре года составляет 2,25.

Формулы удвоения суммы. Для оценки своих перспектив кредитору и должнику нужно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Для этого приравняем множитель наращения к величине N , в результате получим:

а) для простых процентов $1 + ni_{\text{прост}} = N$, тогда

$$n = \frac{N - 1}{i_{\text{прост}}}; \quad (5.26)$$

б) для сложных процентов $(1 + i_{\text{сложн}})^n = N$, тогда

$$n = \frac{\ln N}{\ln(1 + i_{\text{сложн}})}. \quad (5.27)$$

Для случая $N = 2$ формулы (5.26) и (5.27) называются *формулами удвоения*. Они принимают следующий вид:

а) для простых процентов

$$n = \frac{1}{i_{\text{прост}}}; \quad (5.28)$$

б) для сложных процентов

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{\text{сложн}})}. \quad (5.29)$$

На практике для быстрой оценки эффективности предлагаемой ставки наращивания сложных процентов иногда пользуются приближенным расчетом при удвоении инвестиционной суммы, известным как «правило 72». Правило заключается в следующем: если i — процентная ставка, выраженная в процентах, то $72/i$ представляет собой число периодов, за которое приблизительно исходная сумма удвоится. Это правило дает хорошие результаты для небольших значений i . Так, если годовая ставка сложных процентов $i = 12\%$, то применение «правила 72» дает значение $n = 6$ лет, а по формуле (5.29) $n = 6,116$ года, что вполне допустимо для ориентировочных расчетов.

Отметим, что в большинстве финансовых расчетов процентная ставка берется в десятичных дробях, а при расчете по «правилу 72» ($n \approx 0,72/i$) принимается в процентах.

Существуют и другие правила, с помощью которых можно быстро рассчитать ориентировочный срок удвоения первоначального капитала. В литературе можно встретить «правило 70» ($n \approx 0,7/i$), «правило 71» ($n \approx 0,71/i$), «правило 69» ($n \approx 0,69/i$).

Пример 11. Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов, равной 3% годовых. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формулам. Результаты сравнить.

Решение. Для случая простых процентов расчет проведем по формуле (5.28):

$$n = \frac{1}{i_{\text{прост}}} = \frac{1}{0,03} = 33,33 \text{ года.}$$

Для сложных процентов — по точной формуле (5.29):

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{\text{сложн}})} = 23,45 \text{ года.}$$

Для сложных процентов — по приближенной формуле:

$$n \approx \frac{0,7}{i} = \frac{0,7}{0,03} \approx 23,33 \text{ года.}$$

Таким образом, одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к разным результатам, при малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают почти одинаковые результаты.

Начисление процентов при дробном числе лет. При дробном числе лет проценты начисляются разными способами:

1) по формуле сложных процентов:

$$S = P(1 + i)^n;$$

2) на основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное — простые:

$$S = P(1 + i)^a(1 + bi), \quad (5.30)$$

где $n = a + b$; a — целое число лет, b — дробная часть года;

3) в ряде коммерческих банков применяется правило, в соответствии с которым за отрезки времени меньше периода начисления проценты не начисляются, т.е.

$$S = P(1 + i)^a, \quad (5.31)$$

где b — дробная часть. Поскольку $b < 1$, имеем $1 + bi > (1 + i)^b$. Следовательно, наращенная сумма, вычисленная по формуле (5.30), будет больше суммы, вычисленной по формуле сложных процентов. Можно показать, что при малых i наибольшая величина разности при расчетах по этим формулам достигается при $b = 0,5$.

Пример 12. Банк предоставил ссуду в размере 100 тыс. руб. на 30 месяцев под 30% сложных годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму предстоит заемщику вернуть банку по истечении срока ссуды? Расчет провести тремя способами. Проанализировать полученные результаты расчета.

Решение. Определим суммы, которые необходимо вернуть банку, тремя способами:

$$S_1 = 100(1 + 0,3)^{2,5} = 192,69 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$S_2 = 100(1 + 0,3)^2(1 + 0,3 \cdot 0,5) = 194,35 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$S_3 = 100(1 + 0,3)^2 = 169 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Вариант расчета третьим способом выгоден заемщику, вариант расчета вторым способом — банку.

Номинальная ставка процентов. Пусть годовая ставка сложных процентов равна j , а число периодов начисления в году m . Тогда каждый раз проценты

начисляют по ставке j/m . Ставка j называется *номинальной*. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^N, \quad (5.32)$$

где N — общее число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m -разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитать несколькими способами, приводящими к разным результатам.

Пример 13. В банк вложены деньги в сумме 5 тыс. руб. на два года с полугодовым начислением сложных процентов по ставке 20% годовых. Определить наращенную сумму и сравнить ее со случаем, когда проценты начисляются ежеквартально.

Решение. Определим наращенную сумму при полугодовом начислении процентов по формуле (5.32):

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^N = 5 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{2} \right)^4 = 7,321 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Если начисление будет производиться ежеквартально, то сумма к концу двух лет составит:

$$S = 5 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{4} \right)^8 = 7,387 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Следовательно, наращенная сумма при полугодовом начислении процентов к концу двух лет составит 7,321 тыс. руб., а при ежеквартальном — 7,387 тыс. руб.

Можно сделать следующие выводы:

- чем чаще в течение года происходит начисление по сложным процентам, тем больше наращенная сумма;
- при начислении сложных процентов 12% годовых неэквивалентно 1% в месяц;
- для простых процентов эти выводы недействительны. Одно из характерных свойств наращения по простым процентам заключается в том, что наращенная сумма не зависит от частоты начисления простых процентов. Например, наращение простыми процентами ежегодно по ставке 12% годовых дает тот же результат, что и ежемесячное наращение в течение года по ставке 1% в месяц;
- при наращении по сложным процентам ежемесячное начисление приносит больший результат, чем один раз в год.

Пример 14. Размер ссуды 20 тыс. руб., она предоставлена на 28 месяцев. Номинальная ставка равна 60% сложных годовых. Начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех случаях:

на дробную часть начисляются сложные проценты;

на дробную часть начисляются простые проценты;

дробная часть не учитывается.

Результаты расчетов сравнить.

Решение. Начисление процентов ежеквартальное. Всего имеется 28/3 кварталов. Определим наращенную сумму, когда на дробную часть начисляются сложные проценты:

$$S = 20 \left(1 + \frac{0,6}{4} \right)^{28/3} = 73,713 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Вычислим наращенную сумму, когда на целую часть года начисляются сложные проценты, а на дробную — простые проценты:

$$S = 20 \left(1 + \frac{0,6}{4} \right)^9 \left(1 + \frac{0,6}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) = 73,875 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Найдем наращенную сумму, когда дробная часть года не учитывается:

$$S = 20 \left(1 + \frac{0,6}{4} \right)^9 = 70,358 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Наращенные суммы в трех рассмотренных случаях составляют 73,713 тыс., 73,875 тыс. и 70,358 тыс. руб.

Из полученных результатов расчета следует, что наибольшего значения наращенная сумма достигает во втором случае, т.е. при начислении на дробную часть простых процентов, наименьшего — в третьем случае, когда наращение дробной части года не учитывается.

Эффективная ставка. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке j/m .

Если проценты начисляются по сложной ставке m раз в год, каждый раз со ставкой j/m , то можно записать равенство для множителей наращения:

$$(1 + i_3)^n = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}, \quad (5.33)$$

где i_3 — эффективная ставка, а j — номинальная. Из (5.33) получим выражение для определения эффективной ставки через номинальную:

$$i_3 = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1. \quad (5.34)$$

Обратная зависимость имеет вид:

$$j = m[(1 + i_3)^{1/m} - 1]. \quad (5.35)$$

Пример 15. Предприниматель может получить ссуду на условиях:

- ежемесячного начисления процентов из расчета 26% годовых;
- полугодового начисления процентов из расчета 27% годовых.

Какой вариант расчета предпочтителен для предпринимателя?

Решение. Определим эффективную годовую ставку при ежемесячном и полугодовом начислении процентов:

$$i_3 = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,26}{12}\right)^{12} - 1 = 0,2933;$$

$$i_3 = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,27}{2}\right)^2 - 1 = 0,2882.$$

Эффективная годовая ставка процентов при ежемесячном начислении составляет 29,33%, а при полугодовом — 28,82%. Значит, второй вариант для предпринимателя более предпочтителен.

Эффективная ставка не зависит от величины кредита, а зависит только от номинальной ставки и количества начислений.

Понимание роли эффективной процентной ставки важно для анализа финансовой деятельности предприятия. В рекламных проспектах обычно не говорится о природе процентной ставки, хотя в большинстве случаев речь идет о номинальной процентной ставке, которая может существенно отличаться от эффективной.

В США в практических расчетах применяют номинальную ставку, в европейских странах, как правило, — эффективную.

Пример 16. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение. По формуле обратной зависимости (5.35) получаем:

$$j = m[(1 + i_3)^{1/m} - 1] = 4[(1 + 0,12)^{1/4} - 1] = 0,115.$$

Чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых, номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов должна составлять 11,5%.

Пример 17. Рассчитать эффективную годовую процентную ставку при различной частоте начисления процентов, если номинальная составляет 10%.

Решение. Результаты расчета эффективной годовой процентной ставки при различной частоте начисления представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

m	1	2	4	12	365
$i_э$	0,1	0,1025	0,10381	0,10471	0,10516

Таким образом, при $j = 0,1$, $i_э > j$ при различных частотах начисления процентов.

Математически можно показать, что при $m > 1$ выполняется условие $i_э > j$.

В финансовых соглашениях не имеет значения, какую из процентных ставок указывать, поскольку использование как одной, так и другой дает одну и ту же наращенную сумму.

Учет по сложной ставке процентов. Как и в случае простых процентов, рассмотрим два вида учета: математический и банковский.

Математический учет. В этом случае решается задача, обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения $S = P(1 + i)^n$, из нее найдем P :

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n} = Sv^n, \quad (5.36)$$

где

$$v^n = \frac{1}{(1 + i)^n} \quad (5.37)$$

— *учетный, или дисконтный, множитель.*

Если проценты начисляются m раз в году, то

$$P = \frac{S}{(1 + j/m)^{mn}} = Sv^{mn}, \quad (5.38)$$

где

$$v^{mn} = \frac{1}{(1 + j/m)^{mn}} \quad (5.39)$$

— *дисконтный множитель.*

Величину P , полученную дисконтированием S , называют *современной (текущей) стоимостью*, или *приведенной величиной* S .

Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P , выплачиваемой в настоящий момент. Разность $D = S - P$ называют *дисконтом*.

Банковский учет. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется

по формуле

$$P = S(1 - d_{\text{сл}})^n, \quad (5.40)$$

где $d_{\text{сл}}$ — сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае определяется по формуле

$$D = S - P = S - S(1 - d_{\text{сл}})^n = S[1 - (1 - d_{\text{сл}})^n]. \quad (5.41)$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Номинальная и эффективная учетные ставки. В тех случаях, когда дисконтирование применяют m раз в году, используют *номинальную учетную ставку* f . Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m . Процесс дисконтирования по этой сложной учетной ставке m раз в году описывается формулой

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^N, \quad (5.42)$$

где N — общее число периодов дисконтирования ($N = mn$).

Дисконтирование не один, а m раз в году быстрее снижает величину дисконта.

Под *эффективной учетной ставкой* понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m раз.

В соответствии с определением эффективной учетной ставки найдем ее связь с номинальной из равенства дисконтных множителей:

$$\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn} = (1 - d_{\text{сл}})^n,$$

из которого следует, что

$$d_{\text{сл}} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m. \quad (5.43)$$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной.

Наращение по сложной учетной ставке. Нарастение является обратной задачей для учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить из формул дисконтирования (5.40) и (5.42). Получаем

$$S = \frac{P}{(1 - d_{\text{сл}})^n}; \quad (5.44)$$

$$S = \frac{P}{(1 - f/m)^N}. \quad (5.45)$$

Пример 18. Какую сумму следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 200 тыс. руб., срок погашения 2 года. Вексель рассчитывается исходя из сложной годовой учетной ставки 10%.

Решение. По формуле (5.44) определим, какую сумму следует проставить в векселе:

$$S = \frac{200}{(1 - 0,1)^2} = 246,914 \text{ (тыс. руб.)}.$$

В векселе следует проставить сумму, равную 246,914 тыс. руб.

Пример 19. Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется поквартально.

Решение. По формуле (5.45) определим, какую сумму следует проставить в векселе:

$$S = \frac{200}{(1 - 0,1/4)^8} = 244,902 \text{ (тыс. руб.)}.$$

В векселе следует проставить сумму, равную 244,902 тыс. руб.

Непрерывные проценты. Нарощенная сумма при дискретных процентах, как было показано, определяется по формуле

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn},$$

где j — номинальная ставка процентов; m — число периодов начисления процентов в году.

Чем больше m , тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \rightarrow \infty$ имеем:

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} = P \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^m \right]^n.$$

Из курса математики согласно второму замечательному пределу известно, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m/j} \right]^j = e^j,$$

где e — основание натурального логарифма.

Таким образом, формула наращенной суммы в случае непрерывного начисления процентов по ставке j имеет вид

$$S = Pe^{jn}. \quad (5.46)$$

Для того чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ставку непрерывных процентов называют *силой роста* и обозначают δ :

$$S = Pe^{\delta n}. \quad (5.47)$$

Сила роста представляет собой номинальную ставку процентов при $m \rightarrow \infty$.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P = Se^{-\delta n}. \quad (5.48)$$

Пример 20. На первоначальную сумму долга 10 тыс. долл. непрерывно начисляются проценты по силе роста 7,5% в течение 10 лет. Определить наращенную сумму.

Решение. По формуле (5.47) получим:

$$S = Pe^{\delta n} = 10e^{0,75} = 21,17 \text{ (тыс. долл.)}.$$

Нарращенная сумма составит 21,17 тыс. долл.

Связь дискретных и непрерывных процентных ставок. Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, согласно которой можно переходить от непрерывных процентов к дискретным и наоборот.

Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить, приравнявая соответствующие множители наращения:

$$(1 + i)^n = e^{\delta n}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\delta = \ln(1 + i); \quad (5.49)$$

$$i = e^{\delta} - 1. \quad (5.50)$$

Пример 21. Годовая ставка сложных процентов равна 15%. Чему равна эквивалентная сила роста?

Решение. Из формулы (5.49) следует:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1 + 0,15) = 0,1398.$$

Годовой ставке 15% сложных процентов эквивалентна сила роста, равная 13,98%.

Расчет срока ссуды и процентных ставок. На практике встречаются случаи, когда начальная и конечная суммы заданы контрактом и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения с рыночными показателями и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины можно найти из формул наращивания или дисконтирования.

Рассмотрим задачу расчета срока ссуды и процентных ставок.

1. Из формулы наращивания $S = P(1 + i)^n$ следует, что

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1 + i)}; \quad (5.51)$$

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1. \quad (5.52)$$

2. При наращивании по номинальной ставке процентов m раз в году из формулы $S = P(1 + j/m)^{mn}$ получаем:

$$n = \frac{\ln(S/P)}{m \ln(1 + j/m)}; \quad (5.53)$$

$$j = m \left[\left(\frac{S}{P}\right)^{1/(mn)} - 1 \right]. \quad (5.54)$$

3. При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке $d_{\text{сл}}$. Из формулы $P = S(1 - d_{\text{сл}})^n$ имеем:

$$n = \frac{\ln(P/S)}{\ln(1 - d_{\text{сл}})}; \quad (5.55)$$

$$d_{\text{сл}} = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{1/n}. \quad (5.56)$$

4. При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году из выражения $P = S(1 - f/m)^{mn}$ находим:

$$n = \frac{\ln(P/S)}{m \ln(1 - f/m)}; \quad (5.57)$$

$$f = m \left[1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{1/(mn)} \right]. \quad (5.58)$$

5. При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из формулы $S = Pe^{\delta n}$, получаем:

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\delta}, \quad (5.59)$$

$$\delta = \frac{\ln(S/P)}{n}. \quad (5.60)$$

Пример 22. Определить годовую процентную ставку начисляемых ежегодно процентов, если вложенная сумма денег удваивается через восемь лет.

Решение. По формуле (5.52) найдем годовую ставку процентов:

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1 = 2^{1/8} - 1 = 0,09.$$

Годовая процентная ставка, по которой через восемь лет происходит удвоение вложенной суммы, составляет 9%.

5.1.3. Начисление процентов в условиях инфляции

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период n характеризуется *индексом покупательной способности* $J_{\text{пок.}}$. Известно, что индекс покупательной способности равен обратной величине *индекса цен (инфляции)* J_P :

$$J_{\text{пок.}} = \frac{1}{J_P}. \quad (5.61)$$

Индекс цен (инфляции) показывает, во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Инфляция и начисление по простым процентам. Если наращенная за n лет сумма денег равна S , а индекс цен — J_P , то реально наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности составляет

$$C = \frac{S}{J_P}. \quad (5.62)$$

Пусть ожидаемый средний годовой *темп инфляции* (характеризующий прирост цен за год) равен h . Тогда годовой индекс цен составит $1 + h$.

Если наращение производится по простой ставке в течение n лет, то реальное наращение при темпе инфляции h составит

$$C = \frac{P(1 + ni)}{J_P}, \quad (5.63)$$

где в общем случае

$$J_P = \prod_{t=1}^n (1 + h_t), \quad (5.64)$$

и при неизменном темпе прироста цен h

$$J_P = (1 + h)^n. \quad (5.65)$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i = \frac{J_P - 1}{n}. \quad (5.66)$$

Один из способов компенсации обесценивания денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой *инфляционной премии*. Скорректированная таким образом ставка называется *брутто-ставкой*. Брутто-ставка, которую обозначим r , находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке множителю наращения по реальной ставке процента:

$$\frac{1 + nr}{J_P} = 1 + ni, \quad (5.67)$$

откуда находим:

$$r = \frac{(1 + ni)J_P - 1}{n}. \quad (5.68)$$

Инфляция и начисление по сложным процентам. Нарощенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуды с учетом падения покупательной способности денег (т.е. в неизменных рублях) составит:

$$C = \frac{P(1 + i)^n}{J_P}, \quad (5.69)$$

где индекс цен определяется выражением (5.64) или (5.65) в зависимости от темпа инфляции.

Применяют два способа компенсации потерь от снижения покупательной способности денег при начислении сложных процентов.

1. Корректировка ставки процентов, по которой проводится наращение, на величину инфляционной премии, т.е. расчет брутто-ставки r . Считая, что годовой темп инфляции равен h , можем написать равенство соответствующих множителей наращения

$$\frac{1 + r}{1 + h} = 1 + i, \quad (5.70)$$

где i — реальная ставка.

Отсюда находим:

$$1 + r = (1 + h)(1 + i) = 1 + i + h + ih,$$

откуда

$$r = i + h + ih. \quad (5.71)$$

Инфляционная премия равна $h + ih$.

2. Индексация первоначальной суммы P . В этом случае сумма P корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда получаем:

$$S = PJ_P(1+i)^n; \quad (5.72)$$

$$S = P(1+h)^n(1+i)^n. \quad (5.73)$$

Пример 23. Предполагается, что темп инфляции составит 20% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия?

Решение. Брутто-ставку вычислим по формуле (5.71):

$$r = i + h + ih = 0,1 + 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,32.$$

Инфляционная премия составит:

$$h + ih = 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,22.$$

В договоре следует проставить ставку сложных процентов, равную 32% годовых, при этом инфляционная премия будет равна 22%.

Пример 24. Кредит в размере 500 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 20% годовых по сложной ставке процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 15% в год. Определить множитель наращенной суммы, учитывающий инфляцию и наращенную сумму.

Решение. Множитель наращенной суммы определяется по формуле

$$J_P(1+i)^n = (1+h)^n(1+i)^n = (1+0,15)^2(1+0,2)^2 = 1,9.$$

Наращенная сумма:

$$S = PJ_P(1+i)^n = 500 \cdot 1,9 = 950 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Множитель наращенной суммы, учитывающий инфляцию, составляет 1,9. Наращенная сумма — 950 тыс. руб.

Измерение реальной ставки процента. На практике приходится решать и обратную задачу — находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из тех же соотношений между множителями наращенной суммы найдем реальную ставку i по заданной (или объявленной) брутто-ставке r . Так как

$$\frac{1+nr}{J_P} = 1+ni,$$

при начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов составит

$$i = \frac{(1 + nr)/J_P - 1}{n}, \quad (5.74)$$

тогда, учитывая, что $J_P = (1 + h)^n$, получим:

$$i = \frac{(1 + nr)/(1 + h)^n - 1}{n}. \quad (5.75)$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением:

$$i = \frac{1 + r}{1 + h} - 1 = \frac{r - h}{1 + h}. \quad (5.76)$$

Пример 25. На годовой вклад помещены денежные средства по ставке 12% годовых. Инфляция составляет 10% в год. Найти реальную ставку процентов для случая простых и сложных процентов при $n = 2$.

Решение. При начислении простых процентов годовая реальная ставка определяется по выражению (5.75):

$$i = \frac{(1 + nr)/(1 + h)^n - 1}{n} = \frac{(1 + 0,24)/(1 + 0,1)^2 - 1}{2} = 0,0124.$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется по формуле (5.76):

$$i = \frac{r - h}{1 + h} = \frac{0,12 - 0,1}{1 + 0,1} = 0,0182.$$

Реальная ставка простых процентов составляет 1,24%, сложных 1,82%.

5.2. Потоки платежей

В контрактах финансового характера часто предусматривают не разовые платежи, а серию платежей, распределенных во времени, например, регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд определенного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда.

Определение 1. Ряд последовательных выплат и поступлений называется *потоком платежей*. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления — положительными.

Обобщающие характеристики потока платежей — наращенная сумма и современная величина, каждая из которых является числом.

Определение 2. *Наращенной суммой потока платежей* называется сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. Под *современной величиной потока платежей* понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или иного фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

5.2.1. Финансовые ренты

Определение 3. Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют *финансовой рентой*, или *аннуитетом*.

Финансовая рента имеет следующие параметры:

- *член ренты* — величина каждого отдельного платежа;
- *период ренты* — временной интервал между двумя соседними платежами;
- *срок ренты* — время от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

• *процентная ставка* — ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;

- число платежей в году;
- число начислений процентов в году;
- моменты платежа внутри периода ренты.

Ренту можно классифицировать по различным признакам.

В зависимости от продолжительности периода рента бывает *годовая* и *p-срочная*, где p — число выплат в году.

По числу начислений различают ренту с начислением процентов один раз в году, m раз в году и непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают *постоянную* (с равными членами) и *переменную* ренту. Если размеры платежей изменяются по некоторому математическому

закону, то появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

В зависимости от вероятности выплаты членов рента бывает верная и условная. *Верная* рента подлежит безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата *условной* ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с *конечным числом членов (ограниченные)* и *бесконечные (вечные)*. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или иному моменту рента бывает *немедленная* и *отложенная (отсроченная)*. Срок немедленной ренты начинает исчисляться сразу, а у отложенной запаздывает.

Ренту различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такую ренту называют *обычной (постнумерандо)*. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренту называют *пренумерандо*. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

Формулы наращенной суммы. Рассмотрим наращение для различных случаев начисления ренты.

1. Обычная годовая рента.

Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R руб., проценты начисляются один раз в год по ставке i . В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются.

Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма, записанная в обратном порядке, будет равна сумме членов геометрической прогрессии:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R , знаменатель $1+i$, число членов n . Эта сумма является наращенной суммой ренты постнумерандо. Она равна

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n,i}, \quad (5.77)$$

где

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (5.78)$$

называется *коэффициентом наращивания ренты*. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i .

Нарощенная сумма ренты пренумерандо $S_{\text{пр}}$ в $1+i$ раз больше постнумерандо и при $m = p = 1$:

$$S_{\text{пр}} = S(1+i) = Rs_{n,i}(1+i) = R \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = R(s_{n+1,i} - 1). \quad (5.79)$$

Пример 26. Для создания пенсионного фонда организация ежегодно перечисляет в банк ренту постнумерандо в размере 10 млн руб. На поступающие платежи начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,18% годовых. Определить размер фонда через шесть лет.

Решение. По формуле (5.77) имеем:

$$S = 10 \frac{(1+0,18)^6 - 1}{0,18} = 94,41 \text{ (млн руб.)}.$$

Итак, размер пенсионного фонда через шесть лет будет равен 94,41 млн руб.

2. Годовая рента, начисление процентов m раз в году.

Пусть платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что каждый раз применяется ставка j/m , где j — номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид:

$$R(1+j/m)^{m(n-1)}, \quad R(1+j/m)^{m(n-2)}, \quad \dots, \quad R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то получим геометрическую прогрессию, первый член которой R , знаменатель $(1+j/m)^m$, число членов n . Сумма членов этой прогрессии (S) будет наращенной суммой ренты:

$$S = R \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}. \quad (5.80)$$

Нарощенная сумма ренты пренумерандо вычисляется по формуле

$$S_{\text{пр}} = S(1+j/m)^m. \quad (5.81)$$

Пример 27. Используя условия примера 26 и приняв, что банк начисляет проценты ежеквартально по номинальной ставке 18% годовых, определить, какой вариант начисления процентов выгоден кредитору.

Решение. По формуле (5.80) имеем:

$$S = 10 \frac{(1 + 0,18/4)^{24} - 1}{(1 + 0,18/4)^4 - 1} = 97,45 \text{ (млн руб.)}.$$

Следовательно, кредитору выгодно ежеквартальное начисление процентов на ренту, при этом размер фонда будет составлять 97,45 млн руб.

3. Рента p -срочная, $m = 1$.

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными суммами, а проценты начисляются один раз в конце года.

Если R — годовая сумма платежей, то размер одного платежа равен R/p . Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке:

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-1/p}, \quad \frac{R}{p}(1+i)^{n-2/p}, \quad \frac{R}{p}(1+i)^{n-3/p}, \quad \dots, \quad \frac{R}{p},$$

у которой первый член R/p , знаменатель $(1+i)^{1/p}$, общее число членов np . Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{R}{p} \frac{(1+i)^{(1/p)np} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} = R s_{n,i}^{(p)}, \quad (5.82)$$

где

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} \quad (5.83)$$

— коэффициент наращивания p -срочной ренты постнумерандо при $m = 1$.

Наращенная сумма ренты пренумерандо вычисляется по формуле

$$S_{\text{пр}} = S(1+i)^{1/p}. \quad (5.84)$$

Пример 28. Господин Иванов вносит в банк в конце каждого месяца по 500 руб. На поступающие суммы платежей начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 22%. Определить размер начисленной суммы через восемь лет.

Решение. По формуле (5.82) найдем размер начисленной суммы $R/p = 500$:

$$S = 500 \frac{(1 + 0,22)^8 - 1}{(1 + 0,22)^{1/12} - 1} = 11\,693 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Итак, размер начисленной банком суммы господину Иванову через восемь лет составит 11 693 тыс. руб.

4. Рента p -срочная, $p = m$.

В контрактах начисление процентов и поступление платежа часто совпадают во времени. Таким образом, число платежей p и число начислений процентов m в году совпадают, т.е. $p = m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы воспользуемся аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год. Таким образом, получаем

$$S = \frac{R}{m} \frac{(1 + 1/m)^{mn} - 1}{j/m} = R \frac{(1 + 1/m)^{mn} - 1}{j}. \quad (5.85)$$

Наращенная сумма ренты пренумерандо вычисляется по формуле

$$S_{\text{пр}} = S(1 + j/m). \quad (5.86)$$

Пример 29. Господин Петров должен отдать долг в размере 200 тыс. руб. Для того чтобы собрать эту сумму, Петров планирует в течение трех лет в конце каждого полугодия вносить в банк определенную сумму, на которую каждые полгода будут начисляться сложные проценты по годовой ставке 15%. Какова должна быть величина вносимых Петровым вкладов? Рассмотреть случай, когда сумма вносится один раз в конце каждого года и проценты начисляются по той же сложной процентной ставке.

Решение. Из выражения (5.85) найдем сумму R , которую необходимо вносить в банк каждые полгода и при полугодовом начислении сложных процентов:

$$R = \frac{Sj}{(1 + j/m)^{mn} - 1} = \frac{200 \cdot 0,15}{(1 + 0,15/2)^{2 \cdot 3} - 1} = 55,218 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Из формулы (5.77) найдем сумму, которую необходимо вносить в банк каждый год и при годовом начислении сложных процентов:

$$R = \frac{Sj}{(1 + j)^n - 1} = \frac{200 \cdot 0,15}{(1 + 0,15)^3 - 1} = 57,595 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Итак, в первом случае Петрову необходимо вносить в банк сумму, равную 55,218 тыс. руб., а во втором случае — сумму в 57,595 тыс. руб. Первый вариант вклада для него более выгоден.

5. Рента p -срочная, $p \geq 1, m \geq 1$.

Это самый общий случай p -срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем, возможно, $p \neq m$.

Первый член ренты R/p , уплаченный спустя $1/p$ года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}(1+j/m)^{m(n-1/p)} = \frac{R}{p}(1+j/m)^{mn-m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p}(1+j/m)^{m(n-2/p)} = \frac{R}{p}(1+j/m)^{mn-2(m/p)}$$

и т.д. Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен R/p , ее знаменатель $(1+j/m)^{m/p}$, число членов np . В результате получаем наращенную сумму:

$$S = \frac{R}{p} \frac{(1+j/m)^{(m/p)np} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1} = R \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]}. \quad (5.87)$$

Наращенная сумма ренты пренумерандо определяется по выражению

$$S_{\text{пр}} = S(1+j/m)^{m/p}. \quad (5.88)$$

Пример 30. Предприятие создает страховой фонд, для чего направляет в банк платежи в размере 100 тыс. руб. в конце каждого трех месяцев, банк начисляет проценты один раз в полгода по ставке 12% годовых. Определить размер страхового фонда через пять лет.

Решение. По формуле (5.87) найдем при $m = 2, p = 4$ и $n = 5$:

$$S = \frac{100}{4} \frac{(1+0,12/2)^{2 \cdot 5} - 1}{(1+0,12/2)^{2/4} - 1} = 668,781 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Таким образом, размер страхового фонда предприятия через пять лет составит 668,781 тыс. руб.

Формулы современной величины. Рассмотрим формулы современной величины.

1. Обычная годовая рента.

Пусть член годовой ренты равен R , процентная ставка i , проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты n . Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$\frac{R}{1+i} = Rv,$$

где $v = \frac{1}{1+i}$ — дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т.д. Таким образом, приведенные величины образуют геометрическую прогрессию $Rv, Rv^2, Rv^3, \dots, Rv^n$, сумма членов которой является современной величиной

$$A = Rv \frac{v^n - 1}{v - 1} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n,i}, \quad (5.89)$$

где

$$a_{n,i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad (5.90)$$

— коэффициент приведения ренты.

Коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока n и процентной ставки i , ее значения обычно имеются в таблице.

Современная величина ренты пренумерандо

$$A_{\text{пр}} = A(1+i). \quad (5.91)$$

Пример 31. Господин Петров предполагает положить в банк, который выплачивает 10% годовых (сложных), такую сумму, чтобы его дочь, студентка 1-го курса, могла снимать с этого счета в конце каждого года по 10000 руб., исчерпав вклад к концу пятилетнего срока обучения. Какую сумму должен положить в банк господин Петров?

Решение. По формуле (5.89) получим:

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 10000 \frac{1 - (0,1 + 1)^{-5}}{0,1} = 37907,87 \text{ (руб.)}.$$

Соответственно господин Петров должен положить в банк 37907,87 руб.

2. Рента p -срочная, $p \geq 1, m \geq 1$.

Аналогично можно получить формулу для расчета современной величины ренты в общем случае для произвольных значений p и m :

$$A = R \frac{1 - (1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p} - 1]}. \quad (5.92)$$

Современная величина ренты пренумерандо:

$$A_{\text{пр}} = A(1+j/m)^m. \quad (5.93)$$

Пример 32. Величина ренты составляет 1000 руб. Срок ренты четыре года. Найти современную величину вносимой ренты при ежеквартальном

дисконтировании платежей сложными процентами по годовой процентной ставке 10%.

Решение. По формуле (5.92) найдем современную величину вносимой ренты при $p = 1$, $n = 4$ и $m = 4$:

$$A = R \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]} = 1000 \frac{1 - (1 + 0,1/4)^{-4 \cdot 4}}{1[(1 + 0,1/4)^{4/1} - 1]} = 3143,88 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, современная величина вносимой ренты составляет 3143,88 руб.

Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты. Пусть A — современная величина годовой ренты постнумерандо, а S — ее наращенная стоимость к концу срока n , $p = 1$, $m = 1$.

Наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму S :

$$S = A(1 + i)^n = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} (1 + i)^n = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}. \quad (5.94)$$

Отсюда следует, что дисконтирование S дает A :

$$Sv^n = A. \quad (5.95)$$

Коэффициент приведения (дисконтирования) и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n,i}(1 + i)^n = s_{n,i}; \quad (5.96)$$

$$s_{n,i}v^n = a_{n,i}. \quad (5.97)$$

5.2.2. Определение параметров финансовой ренты

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости A остальных параметров ренты: R , n , i , p , m . Такие параметры, как m и p , обычно устанавливают подписывающие стороны. Найдем параметры R , n , i .

Определение размера ежегодной суммы платежа. В зависимости от того, какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана (S или A), возможны два варианта расчета:

$$1) R = \frac{S}{s_{n,i}}; \quad (5.98)$$

$$2) R = \frac{A}{a_{n,i}}. \quad (5.99)$$

Определение срока постоянной ренты. Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Из формул для S и A :

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

получаем соответственно следующие два выражения:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}; \quad (5.100)$$

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}. \quad (5.101)$$

Выражение (5.101) имеет смысл только при $R > Ai$.

Определение ставки процентов. Для того чтобы найти ставку i , необходимо решить одно из нелинейных уравнений (предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо) следующего вида:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{или} \quad A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим уравнениям:

$$s_{n,i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{или} \quad a_{n,i} = \frac{A}{R} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \quad (5.102)$$

В этих уравнениях неизвестным является процентная ставка i . Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона — Рафсона и др. Рассмотрим метод линейной интерполяции.

Найдем с помощью оценочных расчетов нижнюю (i_n) и верхнюю (i_b) оценки ставки. Это осуществляется путем подстановки в одну из формул (5.102) различных произвольных значений i и сравнения найденного значения $s_{n,i}$ или $a_{n,i}$ с правой частью выражения (5.102). Далее нижнее значение ставки корректируется по следующей интерполяционной формуле:

$$i = i_n + \frac{s - s_n}{s_b - s_n}(i_b - i_n), \quad (5.103)$$

в которой s , s_n и s_b — значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок i , i_n и i_b соответственно.

Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если достигнута

точность недостаточна, повторно применяют формулу (5.103), заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение множителя наращения (или приведения). Рассмотрим методику нахождения процентной ставки на конкретном примере.

Пример 33. Для создания фонда на замену оборудования компании за 10 лет необходимо накопить 2 млн руб. Ежегодно она может вносить в банк для этой цели 100 тыс. руб. Под какую ставку сложных процентов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?

Решение. Согласно формуле (5.102)

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S}{R} = \frac{2000000}{100000} = 20.$$

Определим $s_{n,i}$ для нескольких произвольных значений процентных ставок. Так, для $i = 0,14$:

$$s_{10;0,14} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,14)^{10} - 1}{0,14} = 19,33.$$

Для $i = 0,15$:

$$s_{10;0,15} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,15)^{10} - 1}{0,15} = 20,304.$$

Поскольку $19,33 < 20 < 20,304$, действительное значение процентной ставки лежит в интервале $0,14 < i < 0,15$.

Воспользуемся формулой (5.103) и найдем действительное значение процентной ставки:

$$i = 0,14 + \frac{(20 - 19,33)(0,15 - 0,14)}{20,304 - 19,33} = 0,1469.$$

Проверим правильность нахождения действительной процентной ставки:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,1469)^{10} - 1}{0,1469} = 20.$$

Следовательно, процентная ставка i должна составлять 14,69%.

5.3. Применение математических моделей

5.3.1. Конверсия валюты и начисление процентов

Рассмотрим совмещение конверсии (обмена) валюты и наращения простых процентов, сравним результаты от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты и от такого их размещения после предварительного обмена на другую валюту.

Возможны следующие четыре варианта наращения процентов:

- 1) без конверсии, когда валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение первоначальной суммы проводится по валютной ставке;
- 2) с конверсией, при этом валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется обратно в исходную валюту;
- 3) без конверсии, в этом случае рублевая сумма размещается в виде рублевого депозита, на который начисляются проценты по рублевой ставке;
- 4) с конверсией, когда рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту и инвестируется в валютный депозит. Проценты начисляются по валютной ставке. Наращенная сумма в конце операции вновь конвертируется в рубли.

Операции без конверсии не представляют сложности. В операции наращения с двойной конверсией имеется два источника дохода: начисление процентов и изменение обменного курса, причем начисление процентов является безусловным источником (ставка фиксирована, инфляцию не рассматриваем). Изменение обменного курса может быть как источником дополнительного дохода, так и приводить к потерям. Остановимся на двух вариантах, в которых предусматривается двойная конверсия (варианты 2 и 4).

Введем обозначения:

P_v — сумма депозита в валюте;

P_r — сумма депозита в рублях;

S_v — наращенная сумма в валюте;

S_r — наращенная сумма в рублях;

K_0 — курс обмена в начале операции (курс валюты в рублях);

K_1 — курс обмена в конце операции;

n — срок депозита;

i — ставка наращения для рублевых сумм (в виде десятичной дроби);

j — ставка наращения для конкретной валюты.

Рассмотрим вариант 2:

ВАЛЮТА $\Rightarrow$ РУБЛИ $\Rightarrow$ РУБЛИ $\Rightarrow$ ВАЛЮТА.

Операция состоит из трех этапов: обмен валюты на рубли, наращение рублевой суммы, обратное конвертирование рублевой суммы в исходную валюту. Нарощенная сумма, получаемая в конце операции в валюте, составит:

$$S_v = \frac{P_v K_0 (1 + ni)}{K_1}. \quad (5.104)$$

Как видим, три этапа операции нашли отражение в этой формуле в виде трех сомножителей.

Множитель наращения с учетом двойного конвертирования равен

$$m = \frac{K_0}{K_1} (1 + ni) = \frac{1 + ni}{K_1/K_0} = \frac{1 + ni}{k}, \quad (5.105)$$

где $k = K_1/K_0$ — темп роста обменного курса за срок операции.

Из равенства (5.105) следует, что множитель наращения m связан линейной зависимостью со ставкой i и обратной — с обменным курсом в конце операции K_1 (или с темпом роста обменного курса k).

Исследуем зависимость общей доходности операции с двойной конверсией от соотношения конечного и начального курсов обмена k .

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции, равна

$$i_{\text{э.п.}} = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Подставим в эту формулу выражение для S_v :

$$i_{\text{э.п.}} = \frac{(K_0/K_1)(1 + ni) - 1}{n} = \frac{1}{k} \frac{1 + ni}{n} - \frac{1}{n}. \quad (5.106)$$

Из формулы (5.106) следует, что с увеличением k доходность $i_{\text{э.п.}}$ падает по гиперболе с асимптотой $-1/n$. При $k = 1$ доходность операции равна рублевой ставке, т.е. $i_{\text{э.п.}} = i$. При $k > 1$ $i_{\text{э.п.}} < i$, а при $k < 1$ $i_{\text{э.п.}} > i$. При некотором критическом значении k , которое обозначим как k^* , доходность операции равна нулю. Из равенства $i_{\text{э.п.}} = 0$ находим:

$$k^* = 1 + ni, \quad (5.107)$$

что означает

$$K_1^* = K_0(1 + ni). \quad (5.108)$$

Таким образом, если ожидаемые величины k или K_1 превышают свои критические значения, то операция убыточна ($i_{\text{э.п.}} < 0$).

Определим максимально допустимое значение курса обмена в конце операции K_1 , при котором эффективность будет равна существующей ставке по

депозитам в валюте, и применение двойного конвертирования не даст никакой дополнительной выгоды. Для этого приравняем множители наращения для двух альтернативных операций:

$$1 + nj = (1 + ni) \frac{K_0}{K_1}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\max K_1 = K_0 \frac{1 + ni}{1 + nj}, \quad (5.109)$$

или

$$\max k = \max \frac{K_1}{K_0} = \frac{1 + ni}{1 + nj}. \quad (5.110)$$

Таким образом, депозит валюты через конверсию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

Рассмотрим вариант:

$$\text{РУБЛИ} \Rightarrow \text{ВАЛЮТА} \Rightarrow \text{ВАЛЮТА} \Rightarrow \text{РУБЛИ}.$$

Это операция с двойной конверсией, когда исходная и конечная суммы в рублях. В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя для наращенной суммы:

$$S_r = \frac{P_r}{K_0} (1 + nj) K_1 = P_r (1 + nj) \frac{K_1}{K_0}. \quad (5.111)$$

Проведем анализ эффективности этой операции и определим критические точки.

Доходность операции в целом определяется по формуле

$$i_{\text{э.п}} = \frac{S_r - P_r}{P_r n}.$$

Отсюда, подставив выражение для S_r , получим:

$$i_{\text{э.п}} = \frac{\frac{K_1}{K_0} (1 + nj) - 1}{n} = \frac{k(1 + nj) - 1}{n}. \quad (5.112)$$

Зависимость показателя эффективности $i_{\text{э.п}}$ от k линейная, при $k = 1$ $i_{\text{э.п}} = j$, при $k > 1$ $i_{\text{э.п}} > j$, при $k < 1$ $i_{\text{э.п}} < j$.

Найдем критическое значение k^* , при котором $i_{\text{э.п}} = 0$:

$$k^* = \frac{1}{1 + nj}, \quad \text{или} \quad K_1^* = \frac{K_0}{1 + nj}. \quad (5.113)$$

Таким образом, если ожидаемые величины k или K_1 меньше своих критических значений, то операция убыточна ($i_{\text{э.п}} < 0$).

Минимально допустимая величина k (темпа роста валютного курса за весь срок операции), обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства $i_{\text{э.п}} = i$):

$$\frac{K_1(1+nj)}{K_0} = 1 + ni,$$

откуда

$$\min k = \frac{1 + ni}{1 + nj}, \quad \text{или} \quad \min K_1 = K_0 \frac{1 + ni}{1 + nj}. \quad (5.114)$$

Таким образом, депозит рублевых сумм через конверсию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше $\min K_1$.

Рассмотрим вариант совмещения конверсии валюты и наращения сложных процентов:

ВАЛЮТА $\Rightarrow$ РУБЛИ $\Rightarrow$ РУБЛИ $\Rightarrow$ ВАЛЮТА.

Три этапа операции запишем в одной формуле для наращенной суммы:

$$S_v = \frac{P_v K_0 (1+i)^n}{K_1}, \quad (5.115)$$

где i — ставка сложных процентов.

Множитель наращения

$$m = \frac{(1+i)^n K_0}{K_1} = \frac{(1+i)^n}{k}. \quad (5.116)$$

Определим доходность операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_{\text{э.с}}$. Из формулы наращения по сложным процентам

$$S = P(1+i)^n$$

находим

$$i_{\text{э.с}} = \sqrt[n]{\frac{S_v}{P_v}} - 1.$$

Подставив в эту формулу значение S_v , получим

$$i_{\text{э.с}} = \sqrt[n]{\frac{P_v (1+i)^n (K_0/K_1)}{P_v}} - 1 = \frac{1+i}{\sqrt[n]{k}} - 1. \quad (5.117)$$

Из этого выражения следует, что с увеличением темпа роста k эффективность $i_{э.с}$ падает.

Анализ показывает, что при $k = 1$ $i_{э.с} = i$, при $k > 1$ $i_{э.с} < i$, а при $k < 1$ $i_{э.с} > i$. Критическое значение k , при котором эффективность операции равна нулю, определяется как

$$k^* = (1 + i)^n, \quad (5.118)$$

что означает равенство среднегодового темпа роста курса валюты годовому темпу наращивания по рублевой ставке.

Таким образом, если ожидаемые величины k или K_1 больше своих критических значений, то рассматриваемая операция с двойной конверсией убыточна ($i_{э.с} < 0$).

Максимально допустимое значение k , при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке j , находится из равенства соответствующих множителей наращивания:

$$(1 + j)^n = \frac{(1 + i)^n}{\max k},$$

откуда

$$\max k = \frac{(1 + i)^n}{(1 + j)^n}, \quad \max K_1 = K_0 \frac{(1 + i)^n}{(1 + j)^n}. \quad (5.119)$$

Таким образом, депозит валюты через конверсию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

Пример 34. Имеется сумма в долларах, которую предполагается разместить на полугодовой депозит. Обменный курс в начале операции 34 руб. за 1 долл., в конце операции предполагается 35 руб./долл. Годовая ставка простых процентов по рублевым депозитам 12%, по валютным — 5%.

Как выгоднее разместить вклад, как валютный или через конверсию в рубли?

Решение. При двойной конверсии

доллар $\Rightarrow$ рубли $\Rightarrow$ рубли $\Rightarrow$ доллар

расчет проводим по формуле (5.106):

$$k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{35}{34} = 1,029;$$

$$i_{э.п} = \frac{1}{k} \frac{1 + ni}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{1,029} \frac{1 + 0,5 \cdot 0,12}{0,5} - \frac{1}{0,5} = 0,06.$$

По условию задачи доходность валютного депозита равна 5%, а по расчетам доходность операции с двойной конверсией составила 6%. Следовательно, выгоднее разместить вклад через конверсию в рубли.

Пример 35. Имеется сумма в рублях, которую предполагается разместить на полугодовой депозит. Обменный курс в начале операции равен 34 руб. за 1 долл., а в конце операции ожидается 35 руб./долл. Годовая ставка простых процентов — 12%, по валютному вкладу — 5%.

Как выгоднее разместить вклад?

Решение. Темп роста обменного курса за срок операции:

$$k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{35}{34} = 1,029.$$

По формуле (5.112) имеем:

$$i_{\text{э.п}} = \frac{k(1 + nj) - 1}{n} = \frac{1,029(1 + 0,5 \cdot 0,05) - 1}{0,5} = 0,109.$$

Вклад выгоднее разместить как рублевый депозит.

5.3.2. Погашение задолженности частями

Контур финансовой операции. *Контур финансовой операции* – это графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами. Финансовая или кредитная операция предполагают сбалансированность вложений и отдачи.

Пусть в банк положена сумма в размере S_0 на срок t . На протяжении этого срока в момент времени t_1 сумма возрастает до величины S_1 . В момент t_1 снимается сумма R_1 , а сумма в банке уменьшается до величины $K_1 = S_1 - R_1$ и т.д. Заканчивается операция получением с вклада остатка суммы R_3 . В этот момент задолженность банка полностью погашается.

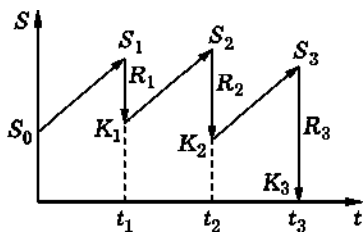


Рис. 5.3

График, представленный на рис. 5.3, является контуром финансовой операции. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. Контур операции, как правило, применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства. Для этого случая существует два метода расчета процентов и определения остатка задолженности: *актуарный метод*, который используют в операциях со сроком более года, и метод, называемый *правилом торговца*, который обычно применяют коммерческие организации в сделках со сроком не более года.

Следует отметить, что при начислении процентов, как правило, используют обычные проценты с приближенным числом дней временных периодов.

Актуарный метод. Этот метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму таких процентов, то разница идет на погашение основного долга. непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Такое поступление приплюсовывается к следующему платежу.

Для случая, показанного на рис. 5.3, получим следующие расчетные формулы для определения остатка вклада:

$$K_1 = S_0(1 + t_1 i) - R_1; \quad K_2 = K_1(1 + t_2 i) - R_2; \quad K_2(1 + t_3 i) - R_3 = 0, \quad (5.120)$$

где t_1, t_2, t_3 — периоды времени, заданные в годах; i — годовая процентная ставка.

Правило торговца. Это правило представляет собой иной подход к расчету частичных платежей. Здесь возможны две ситуации:

1) если срок ссуды не превышает года, сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами;

2) если срок ссуды превышает год, указанные расчеты делают для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитают нарастившую сумму накопленных частичных платежей. Остаток погашают в следующем году.

При общем сроке ссуды $t \leq 1$ можно записать следующее выражение:

$$S_{\text{ост}} = S - K = P(1 + ti) - \sum_{j=1}^m R_j(1 + t_j i), \quad (5.121)$$

где $S_{\text{ост}}$ — остаток долга на конец срока; S — нарастившая сумма долга; K — нарастившая сумма платежей; R_j — сумма частичного платежа; t_j — интервал времени от момента платежа до конца срока; m — число частичных (промежуточных) платежей.

Пример 36. Ссуда в размере 3000 тыс. руб. выдана банком 20 января на один год. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся платежи в банк: 20 апреля в размере 500 тыс. руб., 20 июля в сумме 200 тыс. руб., 20 октября в размере 800 тыс. руб. На ссуду банк предусматривает начисление простых процентов по ставке 30% годовых.

Рассчитать контур финансовой операции для актуарного метода и метода торговца и определить размер погасительного платежа в обоих случаях. Результаты расчета сравнить.

Решение. Вычислим размер погасительного платежа актуарным методом:
на 20 января долг банку составил 3000 тыс. руб.;
на 20 апреля долг с процентами составил

$$3000 \left(1 + 0,3 \cdot \frac{1}{4} \right) = 3000 + 225 = 3225 \text{ (тыс. руб.)};$$

20 апреля в банк поступило 500 тыс. руб., что больше 225 тыс. руб., поэтому из долга вычитается 500 тыс. руб., после чего остаток долга составил

$$3225 - 500 = 2725 \text{ (тыс. руб.)};$$

на 20 июля долг с процентами составил

$$2725 \left(1 + 0,3 \cdot \frac{1}{4} \right) = 2725 + 204,375 = 2929,375 \text{ (тыс. руб.)};$$

20 июля в банк поступило 200 тыс. руб., что меньше 204,375 тыс. руб., поэтому этот платеж присоединяется к платежу 20 октября;
на 20 октября долг с процентами составил

$$2725 \left(1 + 0,3 \cdot \frac{1}{2} \right) = 2725 + 408,75 = 3133,75 \text{ (тыс. руб.)};$$

20 октября в банк поступило 800 тыс. руб., что больше 408,75 тыс. руб., поэтому из долга вычитается 800 тыс. руб.;
на 20 октября остаток долга составил

$$3133,75 - 200 - 800 = 2133,75 \text{ (тыс. руб.)};$$

на 20 января долг с процентами составил

$$2133,75 \left(1 + 0,3 \cdot \frac{1}{4} \right) = 2293,781 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Размер последнего погасительного платежа — 2293,781 тыс. руб.

Вычислим размер погасительного платежа методом торговца.

На конец срока (один год) остаток долга составит:

$$\begin{aligned} 3000(1 + 0,3) - 500 \left(1 + 0,3 \cdot \frac{1}{4} \right) - 200 \left(1 + 0,3 \cdot \frac{1}{2} \right) - 800 \left(1 + 0,3 \cdot \frac{1}{4} \right) = \\ = 3900 - 537,5 - 230 - 860 = 2272,5 \text{ (тыс. руб.)}. \end{aligned}$$

Размер погасительного платежа, вычисленный актуарным методом, составил 2293,781 тыс. руб., а методом торговца — 2272,5 тыс. руб. Для банка выгоден расчет по актуарному методу, для клиента — по методу торговца.

Переменная сумма счета и расчет процентов. Рассмотрим ситуацию, когда в банке открыт сберегательный счет, который изменяется в течение срока хранения: денежные средства снимаются, делаются дополнительные взносы. В таких случаях в банковской практике при расчете процентов часто используют методику расчета с вычислением *процентных чисел*. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляют процентное число C_j за прошедший период j , в течение которого сумма на счете оставалась неизменной, по формуле

$$C_j = \frac{P_j t_j}{100}, \quad (5.122)$$

где t_j — длительность j -го периода в днях.

Для определения суммы процентов, начисленной за весь срок, все процентные числа складываются, и их сумма делится на постоянный делитель D :

$$D = \frac{K}{i}, \quad (5.123)$$

где K — временная база (число дней в году, т.е. 360, 365 или 366); i — годовая ставка простых процентов, %.

При закрытии счета владелец получит сумму, равную последнему значению суммы на счете плюс сумму процентов.

Пример 37. Вкладчик 20 января открыл в банке счет в размере $P_1 = 1000$ руб., процентная ставка по вкладу $i = 15\%$ годовых. Дополнительный взнос на счет был сделан 10 марта в сумме $R_1 = 2000$ руб. Снятие со счета в размере $R_2 = 1500$ руб. зафиксировано 3 мая. 10 октября того же года счет был закрыт.

Определить сумму процентов и общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета. При расчетах принять схему простых процентов с приближенным числом дней ссуды (360/360).

Решение. Имеются три периода, в течение которых сумма на счете оставалась неизменной:

с 20 января по 10 марта — $P_1 = 1000$ руб.; $t_1 = 10 + 30 + 10 = 50$ (дней);

с 10 марта по 3 мая — $t_2 = 20 + 30 + 3 = 53$ (дня), $P_2 = P_1 + R_1 = 1000 + 2000 = 3000$ (руб.);

с 3 мая по 10 октября — $P_3 = P_2 + R_2 = 3000 - 1500 = 1500$ (руб.), $t_3 = 27 + 4 \cdot 30 + 10 = 157$ (дней).

Найдем процентные числа:

$$C_1 = \frac{P_1 \cdot t_1}{100} = \frac{1000 \cdot 50}{100} = 500;$$

$$C_2 = \frac{P_2 \cdot t_2}{100} = \frac{3000 \cdot 53}{100} = 1590;$$

$$C_3 = \frac{P_3 \cdot t_3}{100} = \frac{1500 \cdot 157}{100} = 2355.$$

Постоянный делитель $D = K/i = 360/15 = 24$.

Сумма процентов:

$$I = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{D} = \frac{500 + 1590 + 2355}{24} = 185,21 \text{ (руб.)}.$$

Сумма, выплачиваемая при закрытии счета, составит:

$$P_3 + I = 1500 + 185,21 = 1685,21 \text{ (руб.)}.$$

Сумма процентных денег составит 185,21 руб.; сумма, полученная вкладчиком при закрытии счета, — 1685,21 руб.

Изменение условий контракта. На практике нередко появляется необходимость в изменении условий контракта, например, должник может попросить об отсрочке погашения долга или, напротив, изъявить желание погасить его досрочно, может возникнуть потребность объединить (консолидировать) несколько долговых обязательств в одно. Во всех этих случаях используют принцип финансовой эквивалентности старых (заменяемых) и новых (замещающих) обязательств. Для решения задач по изменению условий контракта разрабатывается *уравнение эквивалентности*, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных контрактов применяют простые процентные ставки, а для средне- и долгосрочных — сложные ставки.

Если в контрактах фигурируют потоки платежей, то при пересмотре условий таких контрактов (например, при изменении частоты или размера выплат, сокращении или увеличении срока ренты, отсрочке платежей, выкупе или досрочном погашении остатка ренты) составляется уравнение эквивалентности для приведенных величин потоков по старым и новым условиям.

В связи с тем, что контракты могут быть составлены с использованием ставок разных видов, для сопоставления доходности необходимо установить правила эквивалентного приведения разных ставок к ставке одного вида. Формулы, определяющие правила эквивалентного перехода от одной ставки к

другой, выводятся на основании принципа финансовой эквивалентности результатов наращения (или дисконтирования) по этим ставкам. Следовательно, для получения таких формул достаточно приравнять соответствующие множители наращения (или дисконтирования). Например, для того чтобы установить эквивалентность между простой ставкой наращения i и простой учетной ставкой d , в подразд. 5.1 мы получили две формулы эквивалентного перехода:

$$i = \frac{d}{1 - nd}; \quad (5.124)$$

$$d = \frac{i}{1 + ni}. \quad (5.125)$$

Аналогично можно получить формулы эквивалентного перехода для любой другой пары ставок.

5.3.3. Выбор инвестиционных и коммерческих проектов

Проведем анализ эффективности инвестиционных и коммерческих проектов, когда денежные средства сначала вкладываются в предпринимательскую деятельность, а затем возвращаются, принося инвестору определенную прибыль.

Задача инвестора состоит в том, чтобы на основе имеющихся на начало проекта данных о доходности вложений и их прогнозе выбрать оптимальный вариант вложения денежных средств. Построение и использование математических моделей, выяснение связи между параметрами проекта являются неотъемлемой частью финансового анализа для принятия инвестором решения.

Экономический анализ эффективности инвестиций — сложная задача с элементами неопределенности и риска. Для выбора наилучшего варианта вложения средств в инвестиционные проекты имеется несколько методик сравнения вариантов инвестиций по следующим показателям:

- чистый приведенный доход;
- внутренняя норма доходности;
- период окупаемости;
- индекс рентабельности.

Рассмотрим методики расчета инвестиций по указанным показателям.

Чистый приведенный доход. Этот показатель обозначается *NPV* (*Netto Present Value*). Иногда данный показатель называют чистой текущей стоимостью. Под *NPV* понимается разность дисконтированных величин чистого дохода и инвестиционных затрат. Общая величина дисконтированных доходов (*Present Value*) обозначается *PV*.

Чистый приведенный доход определяется по формуле

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+i)^k} - IC, \quad (5.126)$$

где P_k , $k = \overline{1, k}$, — годовые доходы; IC — инвестиции.

Общая величина дисконтированных доходов:

$$PV = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+i)^k}, \quad (5.127)$$

$$NPV = PV - IC. \quad (5.128)$$

Примем для инвестора, что поток платежей положительный, если инвестор получает поступления, и отрицательный, если поток платежей является для инвестора расходом. Проект с отрицательным значением NPV для инвестора нецелесообразен. Среди вариантов с положительным NPV целесообразно выбрать тот, у которого NPV больше. Однако этот лучший вариант по NPV надо сравнить с другими проектами, также имеющими положительное значение NPV , но более рентабельными и к тому же менее рискованными.

Пример 38. Проанализировать проект со следующими характеристиками: требуемые инвестиции — 140 млн руб., предполагаемые денежные поступления по годам — 30 млн руб.; 60 млн руб.; 60 млн руб.; 40 млн руб.. Рассмотреть два случая:

- 1) ставка дисконтирования — 12% в год;
- 2) ставка дисконтирования по годам — 12 %; 14 %; 14 %; 15 %.

Решение. Коэффициенты дисконтирования по годам для случая 1 составят:

$$\text{для первого года} — \frac{1}{1+0,12} = 0,893;$$

$$\text{для второго года} — \frac{1}{(1+0,12)^2} = 0,797;$$

$$\text{для третьего года} — \frac{1}{1+0,12)^3} = 0,712;$$

$$\text{для четвертого года} — \frac{1}{(1+0,12)^4} = 0,636.$$

Для случая 1 NPV проекта будет равен:

$$NPV = 30 \cdot 0,893 + 60 \cdot 0,797 + 60 \cdot 0,712 + 40 \cdot 0,636 - 140 = 2,77 \text{ (млн руб.)}.$$

Вычислим NPV проекта для случая 2:

$$\begin{aligned} NPV = & \frac{30}{1,12} + \frac{60}{1,12 \cdot 1,14} + \frac{60}{1,12 \cdot 1,14^2} + \\ & + \frac{40}{1,12 \cdot 1,14^2 \cdot 1,15} - 140 = -1,104 \text{ (млн руб.)}. \end{aligned}$$

Следовательно, для случая 1 проект приемлемый, для случая 2 проект неприемлемый.

Отметим, что существуют таблицы определения дисконтных множителей, что облегчает процедуру дисконтирования и обоснования выбора инвестиционного проекта. В табл. 5.4 приведены некоторые значения дисконтных множителей.

Таблица 5.4

Годовой отсчет начиная с сегодняшней даты	1%	10%	15%	20%	25%
1	0,990	0,909	0,870	0,833	0,769
2	0,980	0,826	0,756	0,694	0,640
3	0,971	0,751	0,658	0,579	0,512
4	0,961	0,683	0,552	0,482	0,410
5	0,951	0,621	0,497	0,402	0,328
6	0,942	0,564	0,432	0,335	0,262
7	0,933	0,513	0,376	0,279	0,210
8	0,923	0,467	0,327	0,233	0,168
9	0,914	0,424	0,284	0,194	0,134
10	0,905	0,386	0,247	0,162	0,107

Внутренняя норма доходности. Этот показатель обозначается *IRR* (*Internal Rate of Return*). Это расчетная ставка процентов, при которой капитализация регулярно получаемого дохода дает сумму, равную инвестициям, что означает их окупаемость. Она показывает значение процентной ставки i , при которой *NPV* проекта равно нулю. Рекомендуется отбирать те проекты, внутренняя норма доходности которых не ниже 15–20%.

Проекты должны отбираться с учетом инфляционного фактора.

Пример 39. Определить значение внутренней нормы доходности для проекта, рассчитанного на три года, если инвестиции для него требуются в размере 10 млн руб., а предполагаемые денежные поступления по годам равны 3 млн руб.; 4 млн руб.; 7 млн руб.

Решение. Составим уравнение доходности:

$$f(i) = \frac{3}{1+i} + \frac{4}{(1+i)^2} + \frac{7}{(1+i)^3} - 10 = 0.$$

Для решения такого нелинейного уравнения возьмем два произвольных значения процентных ставок: $i = 10\%$, $i = 20\%$ и подставим эти значения в уравнение доходности. Для $i = 10\%$ получим $NPV = 1,29$, для $i = 20\%$ $NPV = -0,67$.

Фактическое значение процентной ставки (IRR), при котором $NPV = 0$, определим по выражению

$$IRR = i_n + \frac{f(i_n)(i_b - i_n)}{f(i_n) - f(i_b)}, \quad (5.129)$$

где i_n, i_b — соответственно нижнее и верхнее значения процентных ставок.

Получим:

$$IRR = 10\% + 1,29 \cdot \frac{20\% - 10\%}{1,29 - (-0,67)} = 16,6\%.$$

Внутренняя норма доходности проекта составляет 16,6%. Проект следует принять.

Период окупаемости капиталовложений. Этот показатель обозначается PP (*Payback Period*), его иногда называют сроком окупаемости инвестиций. Это срок, за который можно возратить инвестированные в проект денежные средства. Метод определения PP прост и распространен в мировой практике.

Период окупаемости можно определять без учета времени, по бухгалтерскому методу. Согласно этому методу денежные суммы не приводятся к одному временному сроку. Данный метод позволяет узнать, сколько времени необходимо инвестору для возмещения вложенных средств. Период окупаемости проекта зависит от равномерности распределения доходов от инвестиций. Если доход распределен по годам равномерно, то период окупаемости рассчитывается делением единовременных затрат на величину годового дохода, обусловленного этими затратами. При получении дробного числа лет оно округляется в сторону увеличения до ближайшего целого числа. Если прибыль распределена неравномерно, то период окупаемости рассчитывается прямым подсчетом числа лет, в течение которых инвестиции будут погашены. Недостатком метода является занижение срока окупаемости.

При более точном определении периода окупаемости все денежные суммы приводятся к одному моменту времени — моменту завершения инвестиций, а затем определяется период окупаемости капиталовложений.

Недостаток обоих методов расчета периода окупаемости капиталовложений заключается в том, что в этих методах не учитываются доходы и расходы, которые могут иметь место после полного возмещения денежных средств. Однако приведенная стоимость отдаленных платежей быстро падает и не оказывает существенного влияния на величину периода окупаемости.

При выборе инвестиционного проекта исходят из того, что если срок окупаемости больше допустимой для компании величины, то проект с рассмотрения снимается.

Пример 40. Данные об инвестиционных проектах приведены в табл. 5.5. Определить период окупаемости капиталовложений по двум методам, приняв годовую процентную ставку 16%.

Таблица 5.5

Показатель	Временной период, год						
	0-й	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
Денежные потоки (R_n)	-90	10	20	30	30	40	60
Сумма денежных потоков $\sum R_n$	-90	-80	-60	-30	0	40	100

Решение. Определим срок окупаемости капиталовложений без приведения денежных потоков к начальному моменту времени.

Из табл. 5.5 следует, что срок окупаемости составляет четыре года, так как сумма денежных потоков за четыре года будет равна:

$$-90 + 10 + 20 + 30 + 30 = 0.$$

Определим срок окупаемости с приведением денежных потоков к начальному моменту времени. Результаты расчетов представим в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Показатель	Временной период, год						
	0-й	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й
R_n	-90	10	20	30	30	40	50
$(1+i)^{-n}$	1	0,862	0,743	0,641	0,552	0,476	0,410
$R_n(1+i)^{-n}$	-90	8,62	14,86	19,23	16,56	19,04	24,6
$\sum R_n(1+i)^{-n}$	-90	-81,4	-66,6	-47,3	-30,7	-11,7	12,9

Сравним результаты расчетов за 5-й и 6-й годы. Из табл. 5.6 видно, что уточненный период окупаемости составляет примерно 5,5 года вместо 4 лет, полученных без приведения денежных потоков к начальному моменту времени.

Период окупаемости проекта без приведения денежных потоков к начальному моменту времени составляет 4 года, с приведением денежных потоков к начальному моменту времени — 5,5 года.

Индекс рентабельности. Этот показатель, обозначаемый PI , представляет собой отношение суммы всех дисконтированных денежных доходов от инвестиций к сумме всех дисконтированных расходов IC :

$$PI = \frac{PV}{IC}. \quad (5.130)$$

Если индекс рентабельности меньше 1, то проект следует отклонить, а среди проектов, у которых индекс больше 1, следует отдать предпочтение проекту с наибольшим индексом рентабельности. Если у проекта индекс рентабельности равен 1, то проект не является ни прибыльным, ни убыточным. Однако следует иметь в виду, что не всегда проект с самым большим индексом рентабельности имеет и самый высокий чистый приведенный доход.

Пример 41. Имеются проекты 1 и 2. Для проекта 1 сумма дисконтированных доходов от инвестиций составляет 15 млн руб., а сумма дисконтированных расходов — 9 млн руб; для проекта 2 соответственно 12 и 6 млн руб. Определить, какой проект с учетом индекса рентабельности предпочтительнее.

Решение. Вычислим индексы рентабельности проектов:

$$Pl_1 = \frac{15}{9} = 1,67; \quad Pl_2 = \frac{12}{6} = 2,0.$$

С учетом индекса рентабельности проект 2 предпочтительнее проекта 1. Однако проект 1 позволяет инвестировать больший чистый приведенный доход NPV , что экономически может оказаться более привлекательным.

Таким образом, индекс рентабельности является относительным показателем. Он характеризует уровень доходов, приходящихся на единицу затрат, т.е. эффективность вложений: чем больше значение показателя, тем выше отдача каждого рубля, инвестированного в рассматриваемый проект.

Индекс рентабельности удобен при выборе одного проекта из нескольких альтернативных, имеющих примерно одинаковые значения NPV , но требующих разные объемы инвестиций. В этом случае выгоднее принять тот проект, который обеспечивает большую эффективность вложений.

Приведем пример применения рассмотренных методов выбора инвестиционных проектов.

Пример 42. Компания предложила ведущему менеджеру проанализировать целесообразность приобретения нового технологического оборудования для выпуска пользующегося спросом изделия стоимостью 50 млн руб. Предполагается, что срок эксплуатации оборудования составит пять лет, срок окупаемости — не более четырех лет, амортизация на оборудование начисляется равномерно, ликвидационная стоимость оборудования будет достаточной для покрытия расходов, связанных с демонтажем оборудования. Выручка от реализации производимых изделий ожидается по годам в следующих объемах: 1-й год — 25 млн руб.; 2-й год — 30 млн руб.; 3-й год — 32 млн руб.; 4-й год — 30 млн руб.; 5-й год — 24 млн руб. Текущие расходы оцениваются в первый год эксплуатации оборудования в 12 млн руб. с последующим их ежегодным ростом на 3%. Ставка налога на прибыль составляет 24%.

Сложившееся финансовое положение компании таково, что цена рентабельности авансированного капитала составляет 16%.

Решение. Решение задачи проведем в три этапа:

- 1) определение заданных исходных данных по годам;
- 2) расчет показателей, используемых для выбора проекта;
- 3) анализ показателей и вывод.

1. Имеющиеся исходные данные и необходимые результаты расчета запишем в табл. 5.7.

Таблица 5.7
(млн руб.)

Показатели	Год				
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
1. Объем реализации	25	30	32	30	24
2. Текущие расходы	12	12,36	12,7308	13,113	13,506
3. Амортизация	10	10	10	10	10
4. Налогооблагаемая прибыль	3	7,64	9,269	6,887	0,494
5. Налог на прибыль	0,72	1,8336	2,2246	1,6529	0,1186
6. Чистая прибыль	2,28	5,8064	7,0444	5,2341	0,3754
7. Чистые поступления	12,28	15,8064	17,0446	15,2341	10,3754

1.1. Объем реализации по годам дан в условии примера.

1.2. Определим текущие расходы, они увеличиваются на 3% в год и составят:
в 1-й год: 12 млн руб.;

во 2-й год: $12 \cdot 1,03 = 12,36$ млн руб. и т.д.

1.3. При использовании равномерной амортизации ежегодные отчисления на нее равны: $50/5 = 10$ млн руб.

1.4. Налогооблагаемая прибыль составит:

в 1-й год: $25 - 12 - 10 = 3$ млн руб.;

во 2-й год: $30 - 12,36 - 10 = 7,64$ млн руб. и т.д.

1.5. Определим налог на прибыль, который составляет 24% налогооблагаемой прибыли:

в 1-й год: $3 \cdot 0,24 = 0,72$ млн руб.;

во 2-й год: $7,64 \cdot 0,24 = 1,8336$ млн руб. и т.д.

1.6. Чистая прибыль будет равна:

в 1-й год: $3 - 0,72 = 2,28$ млн руб.;

во 2-й год: $7,64 - 1,8336 = 5,8064$ млн руб. и т.д.

1.7. Чистые поступления составят:

в 1-й год: $25 - 12 - 0,72 = 12,28$ млн руб.;

во 2-й год: $30 - 12,36 - 1,8336 = 15,8064$ млн руб. и т.д.

2. Расчет показателей, используемых для выбора проекта.

2.1. Определим чистую приведенную стоимость при $i = 16\%$ по формуле (5.126):

$$NPV = \frac{12,28}{1+0,16} + \frac{15,8064}{(1+0,16)^2} + \frac{17,0436}{(1+0,16)^3} + \frac{15,2341}{(1+0,16)^4} + \frac{10,3754}{(1+0,16)^5} - 50 = -3,3944.$$

2.2. Внутреннюю норму доходности вычислим из выражения (5.129). По формуле (5.126) для $i = 15\%$ $NPV = -2,2947$ млн руб., для $i = 12\%$ $NPV = 1,2654$ млн руб. Тогда

$$IRR = 0,12 + 1,2654 \cdot \frac{0,15 - 0,12}{1,2654 + 2,2947} = 0,1307; \quad IRR = 13,13\%.$$

2.3. Период окупаемости (PP) менее четырех лет, так как сумма чистых денежных поступлений за этот период равна:

$$12,28 + 15,8064 + 17,0438 + 15,2341 = 60,3644 \text{ (млн руб.)},$$

стоимость нового оборудования — 50 млн руб.; а 60,3644 млн руб. больше 50 млн руб.

2.4. Определим индекс рентабельности (PI) по выражению $PI = \sum PV/IC$:

$$\text{для 1-го года: } PV = \frac{12,28}{1+0,16} = 10,5862 \text{ млн руб.};$$

$$\text{для 2-го года: } PV = \frac{15,8064}{(1+0,16)^2} = 11,7467 \text{ млн руб. и т.д. Таким образом,}$$

$$\sum PV = 46,6056 \text{ млн руб.}, \quad PI = \frac{\sum PV}{IC} = \frac{46,6056}{50} = 0,93.$$

3. Проведем анализ полученных коэффициентов:

$NPV = -3,3943$ — проект неприемлемый;

$IRR = 13,13\% < 16\%$ — проект следует отвергнуть;

PP менее 4 лет — проект пригоден;

$PI = 0,93 < 1$ — проект непригоден.

Менеджеру следует рекомендовать руководству компании не принимать проект.

5.3.4. Модели операций с ценными бумагами

Облигации. Одним из важнейших инструментов для инвестиций в промышленность и сельское хозяйство является рынок ценных бумаг, в том числе выпуск облигаций, гарантирующих получение дохода и высокую надежность. Кроме государства облигации могут выпускать региональные власти, банки и организации.

Определение 4. *Облигация* — ценная бумага, представляющая собой долговое обязательство правительства или организации и гарантирующая владельцу возврат долга с процентами в течение некоторого периода времени в виде регулярных выплат определенной суммы денег, выигрышей или другими способами.

На облигации указывается *номинальная стоимость*, а также *выкупная цена*, которая может отличаться от номинальной стоимости, или формула, по которой выкупная цена рассчитывается. Кроме того, указываются срок выкупа эмитентом (организацией, выпустившей облигацию), норма доходности и сроки выплаты процентов. Обычно проценты выплачиваются ежегодно, по полугодиям или поквартально.

Государственные и региональные облигации выпускаются под гарантии государства и местных властей, облигации организаций — под залог имущества.

По сроку погашения различают *краткосрочные* (до одного года), *среднесрочные* (от одного года до пяти лет) и *долгосрочные* (свыше пяти лет) облигации. Выпускают облигации и без указания срока погашения. Такие облигации могут быть выкуплены в любой момент.

Доход по облигациям выплачивают по *фиксированным* или *переменным* во времени процентным ставкам. В последнем случае применяется ступенчатая процентная ставка. Например, для большей финансовой привлекательности процентная ставка возрастает по годам. Возможна также *плавающая процентная ставка*, зависящая от уровня ссудного процента.

Для защиты от инфляции практикуется индексирование номиналов облигаций пропорционально индексу потребительских цен.

Для облигаций без выплаты процентов выкупная цена устанавливается ниже номинальной, а доход выплачивается при погашении облигаций.

Доходом от облигаций являются фиксированные проценты в сумме с разностью между номинальной стоимостью облигации и ценой ее покупки, а также доходом от реинвестиций процентных денег.

Под *курсом облигации* (R) понимается отношение цены, по которой продается облигация (P), к номинальной стоимости облигации (N) в процентах:

$$R = \frac{P}{N} 100\%. \quad (5.131)$$

Пример 43. Номинальная стоимость облигации 1000 руб. Продается по цене 950 руб. Определить курс облигации.

Решение. По формуле (5.131) находим:

$$R = \frac{950}{1000} \cdot 100\% = 95\%.$$

Курс облигации составляет 95%.

Несмотря на более низкий доход по сравнению с другими видами ценных бумаг, облигации — более надежный метод инвестиций капитала. Поэтому они находят широкое применение в финансовой практике, являясь обязательной составляющей активов страховых и пенсионных фондов, финансовых компаний.

Облигации без выплаты процентов. Прибыль от облигации представляет собой разность между номинальной стоимостью и ценой. Пусть D — прибыль от продажи облигации, тогда

$$D = N - P. \quad (5.132)$$

Из выражения (5.131) следует:

$$P = \frac{RN}{100\%}, \quad (5.133)$$

тогда

$$D = N - P = N - \frac{RN}{100\%} = N \left(1 - \frac{R}{100\%} \right). \quad (5.134)$$

У таких облигаций обычно более короткий срок погашения (до года). Определим доходность покупки облигации по ставке простых процентов:

$$S = P \left(1 + \frac{i_3 t}{K} \right) = \left(1 + \frac{i_3 t}{K} \right) \frac{RN}{100\%}, \quad (5.135)$$

где S — наращенная сумма; K — срок, на который выпущена облигация; i_3 — эффективная ставка простых процентов; t — срок погашения облигации.

Прибыль от покупки облигации

$$D = S - P, \quad (5.136)$$

Учитывая выражения (5.133)–(5.135), получим:

$$i_3 = K \frac{100\% - R}{tR}. \quad (5.137)$$

Определим доходность покупки облигации по ставке сложных процентов:

$$S = P(1 + i_{3,c})^{t/K}, \quad D = S - P = P(1 + i_{3,c})^{t/K} - P, \quad (5.138)$$

где $i_{3,c}$ — эффективная ставка сложных процентов.

С учетом (5.133) получим:

$$D = \left[(1 + i_{3,c})^{t/K} - 1 \right] \frac{RN}{100\%}. \quad (5.139)$$

Приравнявая выражения (5.136) и (5.139), найдем:

$$i_{э.с} = \left(\frac{100\%}{R} \right)^{K/t} - 1. \quad (5.140)$$

Пример 44. Компания купила 50 облигаций номинальной стоимостью 50 тыс. руб. каждая по курсу 95%. Срок погашения — 4 месяца. Определить эффективную ставку прибыли по простым и сложным процентам и прибыль от сделки, если срок, на который выпущены облигации, равен одному году.

Решение. Доход от покупки одной облигации по формуле (5.134) составит:

$$D = N \left(1 - \frac{R}{100\%} \right) = 50 \left(1 - \frac{95\%}{100\%} \right) = 2,5 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Доход от покупки 50 облигаций:

$$2,5 \cdot 50 = 125 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Эффективная ставка прибыли по простым процентам по формуле (5.137) составит:

$$i_э = K \frac{100\% - R}{tR} = 12 \frac{100\% - 95\%}{4 \cdot 95\%} = 0,1579.$$

Отсюда $i_э = 15,79\%$.

Эффективная ставка прибыли по сложным процентам по формуле (5.140) равна:

$$i_{э.с} = \left(\frac{100\%}{R} \right)^{K/t} - 1 = \left(\frac{100\%}{95} \right)^{12/4} - 1 = 0,1664; \quad i_{э.с} = 16,64\%.$$

Эффективная ставка прибыли по простым процентам составляет 15,79%, по сложным — 16,64%, доход от покупки 50 облигаций равен 125 тыс. руб.

Облигации с выплатой процентов в конце срока погашения. Обычно такие облигации выпускают на продолжительный срок. Прибыль от них состоит из процентов, рассчитанных по ставке сложных процентов, и разности между номинальной стоимостью и ценой покупки. Доходность облигации с номинальной стоимостью N , сложной процентной годовой ставкой i_c и ценой продажи P составляет:

$$D = N - P + N(1 + i_c)^n - N, \quad (5.141)$$

где выражение $N(1 + i_c)^n - N$ — процентные деньги, $P = NR/100\%$.

Тогда

$$D = N \left[(1 + i_c)^n - \frac{R}{100\%} \right], \quad (5.142)$$

Выведем выражение для определения эффективной годовой ставки сложных процентов ($i_{\text{э.с}}$). Приравняем формулы (5.138) и (5.142) и, учитывая, что срок погашения облигации $n = t/K$, а $R/100\% = P/N$, найдем $i_{\text{э.с}}$:

$$\begin{aligned} P(1 + i_{\text{э.с}})^{t/K} - P &= N \left[(1 + i_c)^n - \frac{R}{100\%} \right]; \\ (1 + i_{\text{э.с}})^{t/K} &= \frac{N}{P} \left[(1 + i_c)^n - \frac{R}{100\%} \right] + 1; \\ i_{\text{э.с}} &= \frac{1 + i_c}{(R/100\%)^{1/n}} - 1. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Пример 45. Компания купила 20 облигаций по 150 тыс. руб. со сроком погашения два года. Облигации приобретены по курсу 98%, выпущены под процентную ставку сложных 8% годовых. Определить прибыль от покупки и эффективную ставку сложных процентов.

Решение. По формуле (5.142) найдем прибыль от покупки одной облигации:

$$D = N \left[(1 + i_c)^n - \frac{R}{100\%} \right] = 150 \left[(1 + 0,08)^2 - \frac{98\%}{100\%} \right] = 27,96 \text{ руб.}$$

Прибыль от покупки 20 облигаций составит:

$$20 \cdot 27,96 = 559,2 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Найдем эффективную ставку сложных процентов по формуле (5.143):

$$i_{\text{э.с}} = \frac{1 + i_c}{(R/100\%)^{1/n}} - 1 = \frac{1 + 0,08}{(98\%/100\%)^{1/2}} - 1 = 0,09096; \quad i_{\text{э.с}} = 9,096\%.$$

Доход от покупки 20 облигаций составит 559,2 тыс. руб., а эффективная ставка сложных процентов 9,096%.

Акции. Рассмотрим еще один важный вид ценных бумаг.

Определение 5. *Акции* — это ценные бумаги, свидетельствующие о внесении пая в капитал акционерного общества и дающие право на получение дивидендов из прибыли этого общества, участие в управлении акционерным обществом и получение части имущества после ликвидации общества.

Акции выпускаются банками, промышленными и торговыми организациями и бывают *простые* и *привилегированные*.

По простым акциям размер дивидендов заранее не фиксируется и не гарантируется. Величину дивидендов определяет общее собрание акционеров

по итогам хозяйственной деятельности акционерного общества за истекший период. Простые акции дают право на управление акционерным обществом по принципу: одна акция — один голос (иногда несколько голосов).

Владельцы привилегированных акций получают дивиденды в первую очередь. Минимальная величина дивидендов определяется фиксированными процентами от номинальной суммы акции. Величину процентов устанавливает акционерное общество при выпуске акций. В случае ликвидации акционерного общества владелец имеет право на первоочередной возврат внесенного пая. Права на управление акционерным обществом привилегированные акции не дают.

Возможны различные варианты выплаты дивидендов по привилегированным акциям. Выплаты по акциям с *накоплением дивидендов* бывают приурочены к определенным датам, например к выходу работника организации на пенсию; для акций с *плавающим дивидендом* учитывается инфляция; *возвратные* могут быть отозваны обществом с выплатой премии и т.д.

Под *курсовой стоимостью акции* (курсом акции) понимается цена акции, складывающаяся на фондовом рынке при ее покупке или продаже. Владелец акции может продать ее по курсовой стоимости, которая зависит от многих факторов, и в первую очередь от рентабельности общества.

Под *номинальной стоимостью акции* (номинал) понимается указанная на акции цена, по которой она продается при первичном размещении акционерного капитала. Номинальная цена акции на рынке ценных бумаг значения не имеет.

Акции могут быть *именными*, владелец которых указан на бланке акции, и *на предъявителя* без указания владельца. Именные акции могут быть проданы другому владельцу, но при этом делается запись в книге учета акций и отметка на обратной стороне акции.

Источником дохода от покупки акции является сумма дивидендов и разницы между ценой продажи акции через какой-то период времени и ценой покупки.

Доходы от привилегированных акций. Доход от привилегированных акций D равен процентным деньгам C плюс разность между ценой, по которой акции проданы через некоторое время P' , и ценой покупки акции P :

$$D = C + P' - P. \quad (5.144)$$

Без реинвестиций

$$C = Nnp, \quad (5.145)$$

где p — процентная ставка по привилегированным акциям; n — срок в годах от покупки до продажи; N — номинальная стоимость акции.

Если процентные деньги вновь инвестируются под процентную ставку сложных процентов i_c , то

$$C = Np \frac{(1 + i_{э.с})^n - 1}{i_c}. \quad (5.146)$$

Доход от вложения денег в привилегированные акции найдем с использованием эффективной ставки сложных процентов ($i_{э.с}$):

$$D = P(1 + i_{э.с})^n - P;$$

$$i_{э.с} = \sqrt[n]{\frac{D + P}{P}} - 1. \quad (5.147)$$

Пример 46. Компания приобрела 20 привилегированных акций номиналом по 200 тыс. руб. с фиксированной процентной ставкой 20% в год. Стоимость этих акций ежегодно возрастает на 5% относительно номинальной. Полученные проценты вновь инвестируются под 10% годовых. Определить ожидаемый доход и доходность от продажи акций через два года.

Решение. Процентные деньги от 20 акций за год составят:

$$C_1 = 0,2 \cdot 200 \cdot 20 = 800 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Доход от реинвестиций с учетом формулы (5.146):

$$C = C_1 \frac{(1 + i_{э.с})^n - 1}{i_{э.с}} = 800 \frac{(1 + 0,1)^2 - 1}{0,1} = 1680 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Цена покупки акций:

$$P = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Стоимость акций через два года:

$$P' = 200 \cdot 20 + 0,05 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 2 = 4400 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Ожидаемый доход:

$$D = 1680 + 4400 - 4000 = 2080 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Эффективная процентная ставка доходности сделки по формуле (5.147) составит:

$$i_{э.с} = \sqrt{\frac{D + P}{P}} - 1 = \sqrt{\frac{2080 + 4000}{4000}} - 1 = 0,2329 = 23,29\%.$$

Ожидаемый доход от продажи 20 акций через два года составит 2080 тыс. руб. при доходности сделки 23,29%.

Пример 47. Предприниматель выделил некоторую сумму, на которую он предполагает приобрести акции трех компаний. Эффективные процентные

ставки доходности компаний составляют 15%, 17% и 18%. Сравните выгодность покупки акций для трех вариантов:

- 1) первой компании на 50% выделенной суммы, второй — 30%, третьей — 20%;
- 2) первой компании на 40% выделенной суммы, второй — 30%, третьей — 30%;
- 3) первой компании на 30% выделенной суммы, второй — 40%, третьей — 30%.

Решение. Обозначим выделенную предпринимателем сумму на приобретение акций S . Доходы по вариантам составят:

$$D_1 = 0,5S \cdot 0,15 + 0,3S \cdot 0,17 + 0,2S \cdot 0,18 = 0,162S;$$

$$D_2 = 0,4S \cdot 0,15 + 0,3S \cdot 0,17 + 0,3S \cdot 0,18 = 0,165S;$$

$$D_3 = 0,3S \cdot 0,15 + 0,4S \cdot 0,17 + 0,3S \cdot 0,18 = 0,167S.$$

Предпринимателю выгоден третий вариант.

Упражнения

5.1. Вкладчик вложил в банк 15000 руб. Какая сумма будет на его счету через месяц, квартал, полгода, год, три года при условии, что банк начисляет в год 5% простых годовых?

5.2. Проценты по ссуде в 5000 долл. на 2 месяца составляют 125 долл. Какова годовая процентная ставка?

5.3. Банк выплачивает 60 долл. каждые полгода по валютному вкладу исходя из 3% простых годовых. Какова величина вклада?

5.4. За какой срок вклад в 100 тыс. руб. увеличится вдвое при ставке в 10% простых годовых?

5.5. Найти точное и приближенное число дней между 20 января и 5 октября, год не високосный.

5.6. Кредит в размере 100000 руб. выдан 2 марта по 11 декабря под 18% простых годовых, год високосный. Определить размер наращенной суммы для приближенного и точного расчета процентов.

5.7. Компании выделен банковский кредит на срок с 3 января по 12 марта под простые проценты по ставке 12% годовых. Тремя способами определить коэффициент наращения.

5.8. Господин Петров взял в банке кредит на 6000 долл. сроком на четыре года. Согласно договору за один год простая процентная ставка составляла 8,4%, с учетом инфляции каждый последующий год она повышалась на 2,5 пункта. Определить коэффициент наращения, наращенную сумму и доход банка.

5.9. Заемщик получил кредит на 10 месяцев под 15% простых годовых с условием вернуть 20 тыс. долл. Какую сумму получил заемщик в момент заключения договора и чему равен дисконт?

5.10. Банк принимает у населения вклады под простую процентную ставку 8% годовых. Через сколько дней вклад в 45 000 руб. вырастет до 50 000 руб. (в году принять 365 дней)?

5.11. Клиент предполагает внести в банк сумму в 80 тыс. руб. на 9 месяцев с таким расчетом, чтобы наращенная сумма была не менее 82 тыс. руб. Какова должна быть в этом случае простая процентная ставка?

5.12. На сумму 20 тыс. долл. в год в течение месяца начисляют простые проценты по ставке 20% годовых. Какова будет наращенная сумма, если эта операция повторяется в течение IV квартала (принять $K = 365$ дней)?

5.13. В контракте предусматривается погашение долга через 1,5 года в сумме 200 тыс. руб., первоначальная сумма долга — 185 тыс. руб. Определить величину учетной ставки.

5.14. Владелец векселя на 100 тыс. руб. и сроком погашения 5 месяцев спустя 2 месяца с момента получения векселя, нуждаясь в наличных деньгах, продает его банку. Банк учитывает вексель за 94 тыс. руб. Найти годовую учетную ставку и выкупную стоимость векселя.

5.15. Банк начисляет на вклады ежегодно по сложной ставке 8%. Клиент положил в банк 20 тыс. руб. Какая сумма будет на его счету через пять лет? Сравнить со случаем начисления простых процентов.

5.16. Банк начисляет проценты на вклады по сложной ставке 14% годовых. Определить сумму начисленных процентов тремя способами, если вклад 100 тыс. руб. востребован через 2,5 года.

5.17. Господин Петров может вложить деньги в банк, выплачивающий 7% сложных годовых. Какую сумму ему следует вложить, чтобы получить 30 тыс. долл. через 4 года 6 мес.?

5.18. Определить годовую ставку начисляемых ежегодно сложных процентов, если вложенная сумма денег: удваивается через пять лет; утраивается через четыре года.

5.19. Банк начисляет сложные проценты несколько раз в году по номинальной годовой ставке 16%. Определить годовую ставку процентов в периоде начисления, если проценты начисляются: ежемесячно; ежеквартально; по полугодиям.

5.20. Коммерческий банк начисляет сложные проценты по ставке 25% годовых. Определить срок, за который вклад в 250 тыс. руб. вырастет до 400 тыс. руб.

5.21. Для совершения сделки через 3 месяца клиенту необходимо иметь 50 тыс. долл. В наличии у него имеется 45 тыс. долл. Какой должна быть минимальная номинальная процентная ставка банка, чтобы наращенная сумма была не менее 50 тыс. долл. к указанному сроку? Принять, что начисление проводится по сложной процентной ставке ежемесячно.

5.22. Банк начисляет сложные проценты на вклады по номинальной годовой ставке 12%. Определить доходность вкладов по эффективной годовой ставке процентов при начислении: по полугодиям; ежеквартально; ежемесячно.

5.23. Годовая процентная ставка начисления сложных процентов за кредит установлена на уровне 0,08, плюс надбавка от суммы ссуды в первые два года и 0,08 в следующие два года. Определить величину множителя наращивания к концу срока кредита.

5.24. Определить величину дисконта при продаже финансового документа на сумму 5000 долл., если до срока погашения осталось два года. Банк, покупающий этот документ, применяет для учета сложные проценты по годовой учетной ставке 10%. Рассмотреть случай, когда дисконтирование проводится 4 раза в году. Какой вариант выгоден владельцу финансового документа?

5.25. Определить величину силы роста при начислении сложных процентов на вклад 1000 долл., если в течение двух лет он составил 1200 долл.

5.26. Коммерческий банк принимает вклады от населения сроком на 90 дней, обещая 10% годовых. Годовой ожидаемый уровень инфляции составляет 15%. Определить простую процентную ставку с учетом инфляции и коэффициент наращивания, приняв $K = 365$ дней.

5.27. На сумму 20 000 руб. начисляются сложные проценты в течение трех лет по годовой процентной ставке 0,08. Темп прироста инфляции 0,03 в год. Определить:

- наращенную сумму без учета инфляции;
- реально наращенную сумму с учетом инфляции;
- брутто-ставку;
- наращенную сумму по брутто-ставке.

5.28. Через шесть лет компания должна отдать долг по векселям в размере 1000 тыс. руб. Для того чтобы аккумулировать эту сумму, планируется выплачивать в конце каждого года в банк некоторую сумму. Если банк начисляет сложные проценты по годовой ставке 8%, то какова должна быть величина ежегодных вкладов?

5.29. Для создания страхового фонда компания ежегодно перечисляет в банк 4000 тыс. руб. Банк начисляет сложные проценты по годовой процентной ставке 6%. Определить общую сумму фонда через пять лет, если:

- вклады поступают в конце каждого года, а проценты начисляются каждые полгода;
- вклады поступают в конце каждого квартала, а проценты начисляются каждые полгода;
- поступления и начисления производятся каждый квартал.

Какой вариант размещения вклада выгоден компании?

5.30. Господину Иванову за восемь лет необходимо расплатиться за купленную в кредит квартиру. В конце каждого года он вносит в банк 11 250 долл. Определить величину ежегодной процентной ставки, по которой начисляются сложные проценты за кредит, при величине кредита 225 000 долл.

5.31. Ссуда в размере 500 тыс. руб. выдана 5 января на один год. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся следующие платежи в банк:

5 апреля в размере 100 тыс. руб., 5 июля — 200 тыс. руб., 5 октября — 100 тыс. руб. Рассчитать контур финансовой операции для актуарного метода, метода торговца и определить размер погасительного платежа в обоих случаях. Полученные результаты расчета сравнить.

5.32. Господин Иванов имеет 5000 руб., которые предполагает положить на годовой депозит в банк. Годовая ставка простых процентов по рублевым вкладам — 6%, по валютным вкладам — 5%. Обменный курс в начале операции 30 руб. за 1 долл., ожидаемый курс обмена в конце операции 31 руб. за 1 долл. Что выгоднее, разместить вклад как рублевый или через конверсию в валюту?

5.33. У предпринимателя имеются валютные средства в долларах, которые он предполагает поместить на полтора года на валютный депозит под 5% годовых. Обменный курс в начале операции — 1,19 долл./евро, в конце операции — 1,25 долл./евро. Как выгоднее разместить вклад: в евро или в долларах?

5.34. Проанализировать инвестиционный проект со следующими характеристиками: —150 млн руб.; 30 млн руб.; 70 млн руб.; 70 млн руб.; 30 млн руб. Процентная ставка меняется по годам следующим образом: 12%, 13%, 14%, 14%.

5.35. Проанализировать инвестиционный проект со следующими характеристиками: —350 млн руб.; 100 млн руб.; 150 млн руб.; 200 млн руб.; 130 млн руб.. Рассмотреть два случая:

- 1) процентная ставка 15% на два года и 20% на оставшиеся два года;
- 2) процентная ставка меняется по годам: 12%, 15%, 18%, 21%.

5.36. Определить внутреннюю норму доходности проекта, рассчитанного на четыре года, требующего инвестиции в размере 20 млн руб., предполагаемые денежные поступления от которого составят по годам: 5 млн руб., 7 млн руб., 10 млн руб., 6 млн руб.

5.37. Компания рассматривает целесообразность принятия проекта с денежными потоками, приведенными в табл. 5.5. Цена капитала компании 14%. Проекты со сроком погашения, превышающим четыре года, компания считает неприемлемыми. Провести анализ срока окупаемости проекта:

- 1) без учета времени;
- 2) с приведением денежных сумм к одному моменту времени.

5.38. Коммерческая организация рассматривает целесообразность приобретения новой технологической линии. Стоимость линии 10 млн руб., срок эксплуатации — 5 лет, амортизация на оборудование начисляется из расчета 20% годовых. Выручка от реализации продукции прогнозируется по годам в следующих объемах: 6,8 млн руб., 7,4 млн руб., 8,2 млн руб., 8 млн руб., 6 млн руб. Текущие расходы по годам оцениваются в 3,4 млн руб. в первый год эксплуатации линии с последующим ежегодным ростом их на 3%. Ставка налога на прибыль составляет 30%. Сложившееся финансово-хозяйственное положение коммерческой организации таково, что цена авансированного капитала составляет 19%. В соответствии со сложившейся практикой принятия решений в области инвестиционной политики руководство организации не считает целесообразным участвовать в проектах со сроком окупаемости более четырех лет. Целесообразен ли данный проект к реализации?

5.39. В России в 1995 г. состоялся аукцион по первичному размещению государственных краткосрочных облигаций со сроком обращения 36 дней. Минимальная цена продажи составляла 93,92% номинала. Определить доходность покупки облигаций по минимальной цене.

5.40. Организация приобрела 10 привилегированных акций номиналом по 100 тыс. руб. с фиксированной процентной ставкой 40% в год. Стоимость этих акций ежегодно возрастает на 8% относительно номинала. Полученные проценты вновь инвестируются под 30% годовых. Определить ожидаемый доход и доходность продажи акций через три года.

5.41. Предприниматель выделил некоторую сумму, на которую он предполагает приобрести акции четырех организаций. Эффективные процентные ставки доходности организаций составляют 16%, 20%, 24% и 12%. Сравните выгодность покупки акций для трех вариантов:

1) первой организации на 50% выделенной суммы, второй — на 15%, третьей — на 15% и четвертой — на 20%;

2) первой организации на 30% выделенной суммы, второй — на 30%, третьей — на 20% и четвертой — на 20%;

3) первой организации на 20% выделенной суммы, второй — на 30%, третьей — на 15% и четвертой — на 35%.

Глава 6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование сформировалось как отдельный раздел прикладной математики в 40–50-х гг. XX в. благодаря работам советского ученого, академика, лауреата Ленинской, Государственной и Нобелевской премий Л.В. Канторовича. В 1939 г. он предложил метод разрешающих множителей и решил с использованием математики экономические задачи о наилучшей загрузке машин, раскрое материалов с наименьшими расходами, оптимальном распределении грузов по нескольким видам транспорта и др.

Л.В. Канторович впервые сформулировал такие широко используемые экономико-математические понятия, как оптимальный план, оптимальное распределение ресурсов, объективно обусловленные оценки, и указал многочисленные области экономики, где они могут быть применены.

Д.Б. Юдин и Е.Г. Гольштейн, В.С. Немчинов, В.В. Новожилов и другие советские математики и экономисты продолжили работу по дальнейшему развитию теории линейного программирования и ее применению к исследованию экономических проблем.

Методам линейного программирования посвящено много фундаментальных работ зарубежных, и прежде всего американских, ученых. Математик Дж. Данциг ввел понятие линейного программирования и предложил в 1949 г. алгоритм, получивший название *симплексный метод*. Отметим также исследования С. Гасса, С. Карлина, Р. Беллмана, Д. Неймана, О. Моргенштерна, Д. Хедли, А. Кофмана и др.

Математическое программирование, в которое входит линейное программирование, в настоящее время является одним из направлений исследования операций. В зависимости от вида решаемых задач в нем выделяют такие области, как линейное, нелинейное, дискретное, динамическое, геометрическое. Термин «программирование» введен в связи с тем, что неизвестные переменные, которые находятся в процессе решения задачи, обычно определяют программу или план работы некоторого экономического объекта.

Линейное программирование получило широкое развитие, поскольку многие задачи сферы планирования и управления могут быть сформулированы как задачи линейного программирования, для решения которых имеются эффективные методы. По оценкам специалистов, примерно 80–85% всех решаемых задач оптимизации относится к задачам линейного программирования.

Созданный математический аппарат в сочетании с компьютерными программами, проводящими сложные и трудоемкие расчеты, позволяет широко использовать модели линейного программирования в хозяйственной деятельности и экономической науке.

Отметим, что предпосылка линейности, в то время как в реальной экономике подавляющее большинство зависимостей носит нелинейный характер,

Итоги исследования, проведенного среди 500 крупнейших компаний США, показали, что линейное программирование постоянно применяют 74,2% компаний, нелинейное — 46,8%, динамическое — 29,7%.

6.1.1. Формы модели задач

Эта линейная функция называется *целевой*, а ограничения, которые представляют собой количественные соотношения между переменными, выражающие условия и требования экономической задачи, и математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются *системой ограничений*.

Определение 2. Совокупность соотношений, состоящая из линейной целевой функции и линейных ограничений на ее переменные, называется *математической моделью задачи линейного программирования*.

Математическая модель в общем виде. В общем виде математическая модель задачи линейного программирования записывается так:

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \left(\min \right) \quad (6.1)$$

при ограничениях

[illegible]

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6.3)$$

где $x_j, j = \overline{1, n}$, — неизвестные; a_{ij}, b_i, c_j — заданные постоянные величины.

Все или некоторые уравнения системы ограничений могут быть записаны в виде неравенств.

Математическая модель в более краткой записи имеет вид:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если все ограничения системы (6.2) заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные, то модель такого вида называется *канонической*. Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель *неканоническая*.

Для составления математической модели необходимо:

- обозначить переменные;
- составить целевую функцию исходя из цели задачи;
- записать систему ограничений, учитывая имеющиеся в условии задачи показатели и их количественные закономерности.

Математическая модель в матричной форме имеет вид

$$L(X) = CX \rightarrow \max (\min) \quad (6.4)$$

при ограничениях

$$AX = B;$$

$$X \geq 0,$$

где $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — матрица-строка коэффициентов целевой функции;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$ — матрица-столбец свободных членов; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$ — мат-

рица-столбец неизвестных; $A = (a_{ij})_{m \times n}$ — матрица коэффициентов системы ограничений.

Математическая модель в векторной форме выглядит так:

$$L(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} \rightarrow \max (\min) \quad (6.5)$$

при ограничениях

$$\bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \dots + \bar{A}_n x_n = \bar{B}, \quad \bar{x} \geq 0,$$

где

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

6.1.2. Основные определения

Здесь мы приведем основные определения для решения систем линейных алгебраических уравнений*.

Определение 3. *Решением* системы n линейных уравнений называются такие значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которые после подстановки $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ в каждое уравнение системы, обращают ее в верные числовые равенства.

Определение 4. *Базисным* называется решение, при котором все свободные переменные равны нулю.

Определение 5. *Опорное решение* — это базисное неотрицательное решение.

Определение 6. Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется *оптимальным* и обозначается $\bar{x}_{\text{опт}}$.

Опорное решение может быть невырожденным и вырожденным.

Определение 7. Опорное решение называется *невырожденным*, если число его ненулевых координат равно рангу системы, в противном случае оно является *вырожденным*.

6.1.3. Некоторые теоремы линейного программирования

Теорема 6.1 (о замене линейного неравенства линейным уравнением и неравенством). Каждому решению $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \quad (6.6)$$

соответствует единственное решение $\bar{y} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b \quad (6.7)$$

и неравенства $x_{n+1} \geq 0$ и наоборот.

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005.

Доказательство. Пусть $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — решение неравенства (6.6). Тогда справедливо и числовое неравенство

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \leq b.$$

Обозначим $\alpha_{n+1} = b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n)$.

Тогда

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b,$$

причем $\alpha_{n+1} \geq 0$. Это означает, что $\bar{y} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ есть решение уравнения (6.7), удовлетворяющее неравенству $x_{n+1} \geq 0$. Доказательство обратного утверждения мы опускаем. ■

Таким образом, если система ограничений содержит неравенства (в этом случае говорят, что задача ЛП задана в стандартной форме), то, вводя в каждое неравенство дополнительную переменную, эту систему можно преобразовать в систему уравнений. Дополнительные переменные называют *балансовыми*.

Отсюда вытекает правило перехода от неканонической формы задачи линейного программирования к канонической: *чтобы перейти к канонической форме задачи, необходимо ввести в каждое неравенство балансовую переменную*. При знаке неравенства $\leq$ балансовая переменная вводится в неравенство со знаком плюс, при знаке неравенства $\geq$ — со знаком минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

Пример 1. Привести к канонической форме следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 \geq 5, \\ x_2 + 2x_3 - x_5 \leq 6, \\ 2x_2 - 3x_4 \geq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

Решение. Для приведения системы ограничений, заданной в неканонической форме, к канонической введем балансовые переменные x_6, x_7, x_8 , добавив: в первое неравенство — слагаемое $-x_6$, во второе неравенство — слагаемое x_7 , в третье неравенство — слагаемое $-x_8$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 6, \\ 2x_2 - 3x_4 - x_8 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 8}. \end{cases}$$

Определение 8. *Допустимым решением (допустимым планом) задачи ЛП, данной в стандартной форме, называется упорядоченное множество чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям; это точка в n -мерном пространстве. Множество допустимых решений образует область допустимых*

решений (ОДР) задачи ЛП. ОДР представляет собой выпуклый многогранник (многоугольник). Оптимальное решение задачи ЛП (если оно существует) либо единственно и достигается в одной из вершин многогранника решений, либо оно достигается на всем выпуклом множестве, порожаемом двумя или более вершинами (см. далее теорему 6.4).

Теорема 6.2 (об экстремуме целевой функции в ограниченной области). Если область допустимых решений, заданная системой ограничений задачи линейного программирования, замкнутая и ограниченная, то оптимальное решение задачи ЛП существует, причем хотя бы одно из опорных решений системы ограничений является оптимальным решением этой задачи.

Доказательство. Запишем задачу линейного программирования в векторной форме

$$L(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} \rightarrow \max (\min) \quad (6.8)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_j A_j = b, \\ \bar{x} \geq 0.$$

Рассмотрим случай, когда $L(\bar{x}) \rightarrow \max$. Пусть максимум $L(\bar{x})$ достигается при некотором допустимом решении $\bar{x}_{\text{опт}}$, которое не является опорным решением, т.е. угловой точкой ОДР (вершиной многогранника допустимых решений). Тогда, по определению решения задачи ЛП, $\bar{x}_{\text{опт}}$ — внутренняя точка ОДР, которую можно записать в виде выпуклой линейной комбинации опорных решений:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^s t_i \bar{x}_i, \quad t_i \geq 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad \sum_{i=1}^s t_i = 1,$$

где $\bar{x}_i, i = \overline{1, s}$, — опорные решения системы ограничений.

Подставив $\bar{x}_{\text{опт}}$ в выражение (6.8), получим:

$$\max L(\bar{x}) = L(\bar{x}_{\text{опт}}) = \bar{c} \sum_{i=1}^s t_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^s t_i \bar{c} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^s t_i L_i, \quad (6.9)$$

где $L_i = \bar{c} \bar{x}_i$ — значения целевой функции на опорных решениях.

Так как число опорных решений конечно, выберем из них такое, при котором достигается наибольшее значение целевой функции. Пусть это будет при $i = k$, т.е. $L_i \leq L_k, i = \overline{1, s}$.

Заменим в правой части (6.9) все значения L_i на L_k , получим:

$$\max L(\bar{x}) = \sum_{i=1}^s t_i L_i \leq \sum_{i=1}^s t_i L_k = L_k \sum_{i=1}^s t_i = L_k.$$

Это соотношение может выполняться только при $\max L(\bar{x}) = L_k$, что означает: максимум линейной функции существует и совпадает с одним из опорных решений, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается теорема в случае $L(\bar{x}) \rightarrow \min$. ■

Теорема 6.3 (об экстремуме целевой функции в неограниченной области). Если ОДР неограниченная, то оптимальное решение существует и совпадает, по крайней мере, с одним из опорных решений в том и только в том случае, когда целевая функция ограничена сверху для задач на максимум или снизу для задач на минимум. ■

Если условия теоремы 6.3 не выполняются, то говорят, что целевая функция не ограничена в области допустимых решений.

Теорема об альтернативном оптимуме. Из приведенных теорем следует, что оптимальными решениями могут быть несколько опорных решений задачи ЛП. В этом случае говорят, что задача линейного программирования имеет *альтернативный оптимум*.

Теорема 6.4. Если $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$ — множество всех опорных решений, являющихся оптимальными, то любая выпуклая линейная комбинация этих решений является оптимальным решением.

Доказательство. Рассмотрим случай поиска максимума $L(\bar{x})$

$$L(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} \rightarrow \max \quad (6.10)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_j A_j = b, \\ \bar{x} \geq 0.$$

Пусть $\max L(\bar{x})$ достигается на нескольких опорных решениях $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$:

$$\bar{c}\bar{x}_1 = \bar{c}\bar{x}_2 = \dots = \bar{c}\bar{x}_s = \max L(\bar{x}).$$

Подставим $\bar{x} = \sum_{i=1}^s t_i \bar{x}_i$, где $t_i \geq 0$, $i = \overline{1, s}$, $\sum_{i=1}^s t_i = 1$, в выражение целевой функции (6.10):

$$L(\bar{x}_{\text{опт}}) = \bar{c}\bar{x}_{\text{опт}} = \bar{c} \sum_{i=1}^s t_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^s t_i \bar{c}\bar{x}_i = \sum_{i=1}^s t_i \max L(\bar{x}) = \max L(\bar{x}).$$

Следовательно, $\bar{x}$, определенное выпуклой линейной комбинацией, является оптимальным решением задачи.

Аналогично доказывается теорема в случае поиска минимума $L(\bar{x})$. ■

6.2. Графический метод решения задач

Наиболее простым и наглядным методом решения задач линейного программирования является графический метод. Он применяется для задач ЛП с двумя переменными, заданных в стандартной форме, и задач со многими переменными в канонической форме (при условии, что имеется не более двух *свободных переменных*).

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на которых достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня целевой функции, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач ЛП используют вектор $\text{grad } L$ на плоскости X_1OX_2 , который обозначим $\overline{C}$. Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции, он равен

$$\text{grad } L = \overline{C} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \overline{e}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} \overline{e}_2,$$

где $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ — единичные векторы по осям OX_1 и OX_2 соответственно. Таким образом, $\overline{C} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2} \right)$. Координатами вектора $\overline{C}$ являются коэффициенты целевой функции $L(\overline{x})$.

6.2.1. Алгоритм решения задач

Задачи ЛП решают графическим методом по следующему алгоритму.

1. Находим область допустимых решений из системы ограничений задачи.
2. Строим вектор $\overline{C}$.
3. Проводим линию уровня L_0 , перпендикулярную $\overline{C}$.

4. Линию уровня перемещаем по направлению вектора $\overline{C}$ для задач на максимум и в направлении, противоположном $\overline{C}$ для задач на минимум. Это перемещение проводится до тех пор, пока у линии уровня не окажется только одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка будет точкой *экстремума* целевой функции в области допустимых решений, т.е. будет оптимальным решением задачи линейного программирования.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то задача ЛП будет иметь *бесчисленное множество решений*.

Если ОДР — неограниченная область, то целевая функция может быть неограниченной.

Задача ЛП может быть неразрешима, когда ограничения, определяющие ее ОДР, окажутся противоречивыми.

6.2.2. Определение оптимального плана выпуска изделий

Найдем оптимальный план выпуска изделий на следующем примере.

Пример 2. Компания выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используют два исходных продукта: молоко и наполнители. Расходы продуктов на 1 кг мороженого и их суточные запасы даны в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	сливочное	шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 16 руб., шоколадного — 14 руб.

Требуется определить, какое количество мороженого каждого вида должна производить компания, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение. Пусть x_1 — суточный объем выпуска сливочного мороженого (кг), x_2 — суточный объем выпуска шоколадного мороженого (кг). Составим математическую модель задачи.

Целевая функция будет иметь вид

$$L(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 400; \tag{6.11}$$

$$0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 365; \tag{6.12}$$

$$x_1 - x_2 \leq 100; \tag{6.13}$$

$$x_2 \leq 350; \tag{6.14}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Решим задачу графическим методом. Найдем сначала область допустимых решений (многоугольник $OABDEF$ на рис. 6.1) с граничными линиями, определяемыми неравенствами (6.11)–(6.14).

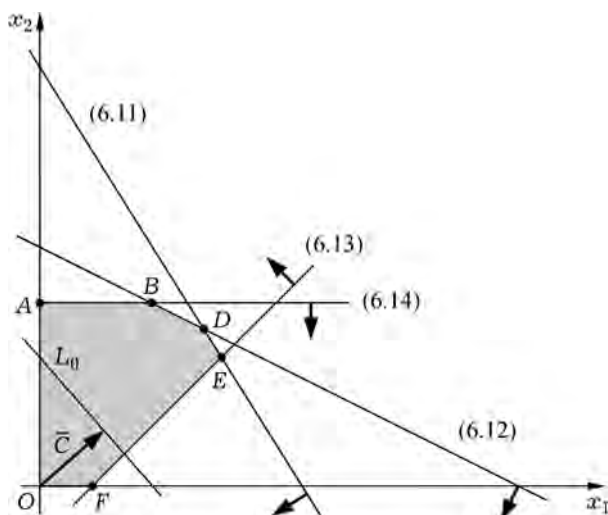


Рис. 6.1

Строим вектор $\vec{C} = (16, 14)$. Линия уровня L_0 имеет уравнение

$$16x_1 + 14x_2 = \text{const.}$$

Перемещаем линию уровня по направлению вектора $\vec{C}$. Точкой выхода L_0 из области допустимых решений является точка D , ее координаты определяются как пересечение прямых, заданных уравнениями:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 = 400, \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему, получаем: $D(312,5; 300)$. Точка D определяет оптимальное решение, т.е. $\bar{x}_{\text{опт}} = (312,5; 300)$, при этом $\max L(\bar{x}) = 16 \cdot 312,5 + 14 \cdot 300 = 9200$ (руб.).

Максимальный доход от реализации составит 9200 руб. в сутки при выпуске 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого.

6.2.3. Экономический анализ задач

Проведем экономический анализ задачи из примера 2 по производству мороженого с использованием графического метода.

Согласно найденному оптимальному решению компании необходимо выпускать в сутки 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого, при этом максимально возможный доход составит 9200 руб.

Определим, как влияет на оптимальное решение увеличение или уменьшение запасов исходных продуктов. Для анализа задачи примем, что неравенства системы ограничений могут быть *активными* или *пассивными*. Если граничная

прямая ОДР проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то будем считать, что она представляет собой активное ограничение. В противном случае прямая является пассивным ограничением.

Если ограничение активное, то будем считать, что соответствующий ресурс относится к *дефицитным*, так как он используется полностью. Если ограничение пассивное, то ресурс *недефицитный* и имеется в компании в избытке.

Рассмотрим увеличение ресурса правой части ограничения (6.11) по молоку (рис. 6.2). При перемещении параллельно самой себе прямой (6.11) вправо до пересечения с прямыми (6.12) и (6.13) в точке M ограничение (6.11) будет оставаться активным. Точку M определим как точку пересечения прямых (6.12) и (6.13):

$$\begin{cases} 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365, \\ x_1 - x_2 = 100. \end{cases}$$

Отсюда точка $M(370,83; 270,83)$.

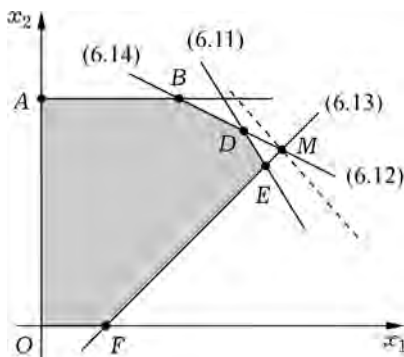


Рис. 6.2

Подставляя координаты точки M в неравенство (6.11), получим предельно допустимый суточный запас молока:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 0,8 \cdot 370,83 + 0,5 \cdot 270,83 = 432,1 \text{ (кг)},$$

при этом величина дохода составит:

$$L(\bar{x}) = 16 \cdot 370,83 + 14 \cdot 270,83 = 9724,9 \text{ (руб.)}.$$

Рассмотрим увеличение ограничения по наполнителям (рис. 6.3). При перемещении прямой (6.12) параллельно самой себе вправо до пересечения с прямыми (6.11) и (6.14) в точке N ограничение (6.12) будет оставаться активным. Точку N определим как точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 = 400, \\ x_2 = 350. \end{cases}$$

Отсюда точка $N(281,25; 350)$.

Предельно допустимый суточный запас наполнителей можно увеличивать до значения

$$0,4x_1 + 0,8x_2 = 0,4 \cdot 281,25 + 0,8 \cdot 350 = 392,5 \text{ (кг)},$$

при этом величина дохода составит:

$$L(\bar{x}) = 16 \cdot 281,25 + 14 \cdot 350 = 9400 \text{ (руб.)}.$$

Рассмотрим возможность изменений правой части пассивных ограничений (6.13) и (6.14). Не изменяя оптимальное решение (рис. 6.4), прямую (6.13) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с точкой $D(312,5; 300)$, т.е. правую часть ограничения (6.13) можно уменьшать до величины $312,5 - 300 = 12,5$ (кг).

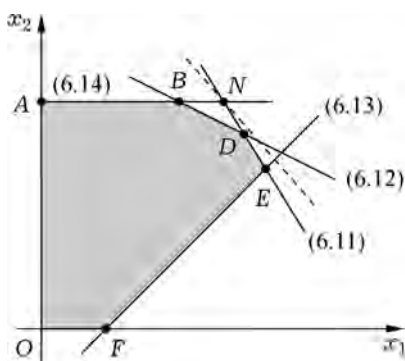


Рис. 6.3

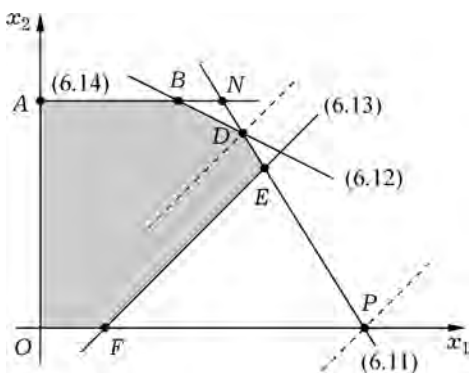


Рис. 6.4

Прямую (6.13) можно перемещать параллельно самой себе вниз до пересечения с осью OX_1 в точке $P(500; 0)$, т.е. правую часть ограничения (6.13) можно увеличивать до 500 кг.

Таким образом, при неизменном оптимальном решении разница в покупательском спросе между сливочным и шоколадным мороженым может изменяться в диапазоне от 12,5 до 500 кг.

Аналогично, не изменяя оптимальное решение (рис. 6.5), прямую (6.14) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с осью OX_2 в точке $R(0; 456,25)$ или вниз до пересечения с прямой (6.12) в точке $D(312,5; 300)$.

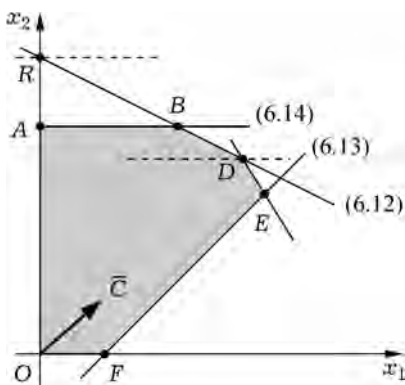


Рис. 6.5

Таким образом, при неизменном оптимальном решении покупательский спрос на шоколадное мороженое может изменяться в диапазоне от 300 до 456,25 кг. Проведем анализ задачи по пределам возможного изменения коэффициентов целевой функции, т.е. по диапазону цен на мороженое, при котором оптимальное решение не изменяется.

Изменение коэффициентов целевой функции оказывает влияние на наклон линии уровня. Уравнение линии уровня записывается в общем виде: $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Из рис. 6.5 видно, что при увеличении c_1 или уменьшении c_2 линия уровня вращается вокруг точки D по часовой стрелке. Если по условию задачи $c_2 = 14$, то c_1 можно увеличивать до совпадения линии уровня с прямой (6.11). Угловой коэффициент линии уровня в таком случае равен

$$K = -\frac{c_1}{c_2} = -\frac{c_1}{14}.$$

Угловой коэффициент прямой (6.11):

$$K_{(6.11)} = -\frac{8}{5}.$$

Поскольку прямые совпадают, то $K = K_{(6.11)}$, откуда $c_{1\max} = 22,4$. Коэффициент c_1 можно уменьшать до совпадения линии уровня с прямой (6.12), поэтому $c_1/14 = 1/2$ и $c_{1\min} = 7$.

Таким образом, оптимальное решение задачи не изменится, если отпускная цена 1 кг сливочного мороженого лежит в диапазоне от 7 до 22,4 руб.; при этом доход компании составит от 6387,5 до 11 200 руб.

Аналогичные рассуждения для случая $c_1 = 16$ позволяют сделать вывод, что оптимальное решение задачи не изменится, если розничная цена 1 кг шоколадного мороженого лежит в диапазоне от 10 до 32 руб., при этом доход компании будет равен от 8000 до 14 600 руб.

6.3. Симплексный метод

Симплексный метод является универсальным, так как позволяет решить любую задачу линейного программирования, заданную в каноническом виде.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) заключается в том, что, начиная с некоторого исходного *опорного решения*, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Поскольку число опорных решений конечно, через конечное количество шагов получим оптимальное опорное решение.

*Красе М.С. Математика в економика. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005.

Коэффициенты при x_j , $j = \overline{r+1, n}$, в скобках обозначим через Δ_j и назовем оценками свободных переменных. Таким образом,

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^r c_i h_{ij} - c_j. \quad (6.16)$$

Целевую функцию запишем в виде

$$L(\bar{x}) = L(\bar{x}_{\text{опт}}) - \Delta_{r+1}x_{r+1} - \Delta_{r+2}x_{r+2} - \dots - \Delta_n x_n. \quad (6.17)$$

Из полученного выражения следует, что если все оценки Δ_j неотрицательны (в случае задачи на максимум), то найденное решение является оптимальным, и его улучшить нельзя. Но если хотя бы одно значение Δ_j отрицательно, то решение можно улучшить, если одну из базисных переменных заменить той, для которой $\Delta_j < 0$.

Таким образом, можно сформулировать критерий оптимальности: решение задачи линейного программирования будет оптимальным, если все оценки свободных переменных неотрицательные (т.е. $\Delta_j \geq 0$) для задачи на максимум и неположительные (т.е. $\Delta_j \leq 0$) для задачи на минимум.

Если в задаче на максимум все оценки свободных переменных Δ_j отрицательны (положительны в задаче на минимум), то эта задача не имеет решения.

Дадим геометрическую интерпретацию симплексного метода. Процесс перехода от одного опорного решения к другому в симплексном методе можно рассматривать как направленное движение по угловым точкам многогранника, ограничивающего область допустимых решений, при котором значение целевой функции увеличивается (уменьшается в задаче на минимум).

Пусть требуется найти значение $\max L(\bar{x})$, которое достигается в точке C (рис. 6.6), а угловой точке A соответствует первоначальное опорное решение со значением целевой функции L_A . Переход к значению $\max L(\bar{x})$

осуществляется через точки B и C . Если в качестве исходного выбрано опорное решение, соответствующее точке E , то симплексный метод реализует переход к точке C через точку D .

Рассмотренная геометрическая иллюстрация показывает, что количество итераций (шагов) в симплексном методе определяется количеством промежуточных угловых точек на пути перемещения от исходного опорного решения к оптимальному.

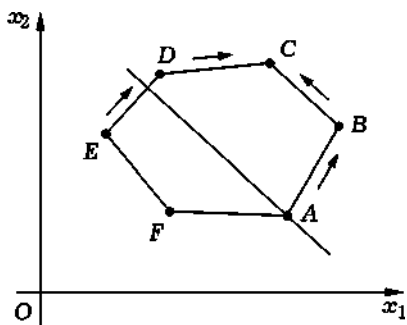


Рис. 6.6

6.3.2. Симплексные таблицы

Для удобства вычислений симплексным методом составляют симплексные таблицы. В отличие от таблиц Гаусса в них добавляют две строки (сверху и снизу) и одну графу. В строке сверху (c_j) указывают коэффициенты всех переменных целевой функции, в строке снизу — оценки Δ_j и в графе (c_i) — коэффициенты целевой функции при базисных переменных (БП).

Приведем алгоритм симплексного метода.

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она неканоническая, то ее нужно привести к каноническому виду.

2. Заполняем *симплексную таблицу* (табл. 6.2). Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции. Находим исходное опорное решение.

Т а б л и ц а 6.2

c_i	БП	c_1	c_2	$\dots$	c_r	c_{r+1}	$\dots$	c_n	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$h_{1,r+1}$	$\dots$	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$h_{2,r+1}$	$\dots$	h_{2n}	f_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_r	x_r	0	0	$\dots$	1	$h_{r,r+1}$	$\dots$	h_{rn}	f_r
Δ_j		0	0	$\dots$	0	Δ_{r+1}	$\dots$	Δ_n	$L(\bar{x}_1)$

3. Проверяем найденное исходное опорное решение на оптимальность. Индексная строка находится по формуле $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_j h_{ij} - c_j$, $j = \overline{1, n}$, для переменных и по формуле $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i f_i$ — для свободного члена. При решении задачи на максимум возможны следующие случаи:

- все оценки $\Delta_j \geq 0$, тогда найденное решение оптимальное;
- хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, тогда решение задачи прекращаем, так как $\max L(\bar{x}) = \infty$, т.е. целевая функция не ограничена в области допустимых решений;
- хотя бы одна оценка отрицательная и при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, тогда можно перейти к другому опорному решению, которому соответствует большее значение целевой функции;
- отрицательных оценок в *индексной строке* несколько, тогда в графу БП вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

Пусть одна оценка $\Delta_k < 0$ или наибольшая по абсолютной величине $\Delta_k < 0$, тогда k -ю графу принимаем за *ключевую*. За *ключевую строку* принимаем

ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов (b_i) к положительным коэффициентам k -й графы. Элемент, находящийся в ключевой строке и ключевой графе, называют *ключевым элементом*.

4. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:
- переписываем ключевую строку, разделив ее на ключевой элемент;
 - заполняем базисные графы;
 - остальные коэффициенты таблицы находим по правилу «прямоугольника». Получаем новое опорное решение.
5. Возвращаемся к первому шагу алгоритма.

Примечания. 1. Если целевая функция $L(\bar{x})$ требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является неположительность оценок $\Delta_j, j = \overline{1, n}$.

2. *Правило «прямоугольника»* состоит в следующем. Пусть ключевым элементом 1-го шага является элемент 1-й строки $(m + 1)$ -й графы $h_{1,m+1}$. Тогда элемент i -й строки $(m + 2)$ -й графы 2-го шага, который обозначим $h'_{i,m+2}$, по правилу «прямоугольника» определяется по формуле

$$h'_{i,m+2} = \frac{h_{1,m+1}h_{i,m+2} - h_{i,m+1}h_{1,m+2}}{h_{1,m+1}},$$

где $h_{i,m+2}, h_{i,m+1}, h_{1,m+1}$ — элементы 1-го шага.

6.3.3. Применение симплексного метода в экономике

Рассмотрим применение симплексного метода на конкретном примере.

Пример 3. Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя способами. Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства заданы в табл. 6.3. При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при втором — 4 тыс. изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие по каждому из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

Таблица 6.3

Производственный ресурс	Расход ресурсов за 1 месяц при работе, ден. ед.		Общий ресурс, усл. ед.
	по способу 1	по способу 2	
Сырье	1	2	4
Оборудование	1	1	3
Электричество	2	1	8

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 — время работы предприятия по первому способу, x_2 — время работы предприятия по второму способу.

Математическая модель задачи имеет вид

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 \leq 4;$$

$$x_1 + x_2 \leq 3;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8; x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 8,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Составляем симплексную таблицу 1-го шага (табл. 6.4).

Таблица 6.4

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	②	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	2	1	0	0	1	8
Δ_j		-3	-4	0	0	0	0

Получим исходное опорное решение:

$$\bar{x}_1 = (0, 0, 4, 3, 8), \quad L(\bar{x}_1) = 0.$$

В индексной строке Δ_j две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить. В качестве ключевой графы следует принять графу базисной переменной x_2 , а за ключевую строку — строку переменной x_3 , так как $\min\{4/2, 3/1, 8/1\} = \min\{2, 3, 8\} = 2$.

Ключевым является элемент 2 в строке переменной x_3 и графе переменной x_2 . Вводим в графу БП переменную x_2 , выводим x_3 . Составляем симплексную таблицу 2-го шага (табл. 6.5 — после выполнения в табл. 6.4 действий, указанных в п. 4).

Из табл. 6.5 находим:

$$\bar{x}_2 = (0, 2, 0, 1, 6), \quad L(\bar{x}_2) = 8.$$

Таблица 6.5

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	1/2	1	1/2	0	0	2
0	x_4	1/2	0	-1/2	1	0	1
0	x_5	3/2	0	-1/2	0	1	6
Δ_j		-1	0	2	0	0	8

В индексной строке табл. 6.5 имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить. Ключевым элементом является 1/2. Составляем симплексную таблицу 3-го шага (табл. 6.6 — после применения в табл. 6.5 действий п. 4).

Таблица 6.6

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	0	1	1	-1	0	1
3	x_1	1	0	-1	2	0	2
0	x_5	0	0	1	-3	1	3
Δ_j		0	0	1	2	0	10

Из табл. 6.6 находим

$$\bar{x}_3 = (2, 1, 0, 0, 3), \quad L(\bar{x}_2) = 10.$$

В табл. 6.6 все оценки свободных переменных $\Delta_j \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение является оптимальным:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = \bar{x}_3 = (2, 1, 0, 0, 3), \quad L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 10.$$

Максимальный выпуск продукции составит 10 тыс. ед., при этом по первому способу предприятие должно работать два месяца, по второму — один месяц.

6.3.4. Решение матричных игр симплексным методом

Теория игр тесно связана с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом и, наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как конечная игра двух лиц с нулевой суммой.

Пусть дана игра двух лиц с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Найдем оптимальное решение задачи для второго игрока симплексным методом (см. п. 6.3.2). Последняя симплексная таблица имеет следующий вид (табл. 6.8).

Таблица 6.8

c_j	БП	1	1	1	0	0	0	b_i
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
1	Y_1	1	0	0	1/7	-1/14	0	1/14
1	Y_2	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196
1	Y_3	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49
	Δ_i	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196

Из табл. 6.8 следует, что $\bar{Y}_{\text{опт}} = (1/14, 11/196, 5/49)$, $S(\bar{Y}_{\text{опт}}) = 45/196$. Цена игры $v = 1/S(\bar{Y}_{\text{опт}}) = 196/45$.

Поскольку $y_i = Y_i v$, имеем: $y_1 = 14/45$, $y_2 = 11/45$, $y_3 = 20/45$.

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (14/45, 11/45, 20/45).$$

Стратегии первого игрока найдем из последней симплексной таблицы, используя метод соответствия переменных исходной и двойственной задачи. Получим:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (20/45, 11/45, 14/45).$$

Таким образом, торговая организация на ярмарке должна придерживаться стратегии $\bar{x}_{\text{опт}} = (20/45, 11/45, 14/45)$, тогда она получит доход не менее $v = 196/45$ ден. ед.

6.4. Двойственные задачи

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, которую называют *двойственной* по отношению к данной (исходной) задаче. Исходная и двойственная задачи тесно связаны между собой и образуют *единую пару* двойственных задач.

В зависимости от структуры модели исходной задачи различают *симметричные*, *несимметричные* и *смешанные двойственные задачи*.

6.4.1. Виды математических моделей двойственных задач

Симметричные двойственные задачи. Рассмотрим случай неканонической модели исходной задачи, в которой все ограничения — неравенства, а переменные x_j неотрицательные. Такая задача имеет вид

$$L(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max$$

Математическая модель двойственной задачи будет такой:

$$S(\bar{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n.$$
$$L(\overline{x}) = S(\overline{y}).$$
$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0.$$

В теореме 6.6 утверждается, что если в оптимальном решении одной из двойственных задач какая-либо переменная строго больше нуля, то соответствующее ей ограничение в другой двойственной задаче выполняется как строгое равенство, и наоборот, если при оптимальном решении одной из двойственных задач какое-либо ограничение выполняется как строгое неравенство, то соответствующая ему переменная в оптимальном решении другой задачи равна нулю.

6.4.2. Решение двойственных задач

Решение симметричных задач. Рассмотрим решение симметричных двойственных задач на конкретном примере.

Исходная задача

$$\begin{aligned} L(\bar{x}) &= x_1 - x_2 \rightarrow \max; \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2; \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2; \\ x_1 + x_2 &\leq 5; \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned} S(\bar{y}) &= 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \min; \\ -2y_1 + y_2 + y_3 &\geq 1; \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &\geq -1; \\ y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Решив исходную задачу графическим методом, получим $\bar{x}_{\text{опт}} = (4, 1)$. При этом $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 3$.

На основании теоремы 6.5 имеем

$$\max L(\bar{x}) = \min S(\bar{y}) = 3.$$

Так как $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, по теореме 6.6 ограничения двойственной задачи можно записать в виде равенств

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 + y_3 &= 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= -1. \end{aligned}$$

Подставим $\bar{x}_{\text{опт}}$ в систему ограничений исходной задачи:

$$\begin{aligned} -2 \cdot 4 + 1 &\leq 2, \\ 4 - 2 \cdot 1 &\leq 2, \\ 4 + 1 &\leq 5. \end{aligned}$$

Первое из этих ограничений выполняется как строгое неравенство. Поэтому $y_1 = 0$. С учетом этого система ограничений двойственной задачи примет вид

$$\begin{aligned} y_2 + y_3 &= 1, \\ -2y_2 + y_3 &= -1. \end{aligned}$$

Она позволяет найти оптимальные значения y_2 и y_3 . В результате $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, при этом $\min S(\bar{y}) = 3$.

Предположим теперь, что известно решение двойственной задачи $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, $S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 3$. Найдем решение исходной.

По теореме 6.5 $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 3$. Так как $y_2 > 0$, $y_3 > 0$, по теореме 6.6 второе и третье ограничения исходной задачи выполняются как равенства:

$$x_1 - 2x_2 = 2,$$

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Решая систему, получим $\bar{x}_{\text{опт}} = (4, 1)$, причем $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 3$.

Рассмотрим решение задач методом, базирующимся на *взаимно однозначном соответствии* между переменными: основным переменным исходной задачи соответствуют балансовые переменные двойственной, и наоборот. Для этого решим двойственную задачу

$$S(\bar{y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$-2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 1,$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 - y_5 = 1,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}.$$

симплексным методом. Результаты расчетов представлены в сводной табл. 6.9.

Т а б л и ц а 6.9

b_i	БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	c_j
		-2	①	1	-1	0	1
	y_5	-1	2	-1	0	1	1
5	y_3	-2	1	1	-1	0	1
0	y_5	-3	3	0	-1	1	2
	Δ_i	-12	③	0	-5	0	5
5	y_3	-1	0	1	-2/3	-1/3	1/3
2	y_2	-1	1	0	-1/3	1/3	2/3
	Δ_i	9	0	0	-4	-1	3

Из табл. 6.9 следует, что $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, $S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 3$.

На основе теоремы 6.5 имеем

$$L(\bar{x}_{\text{опт}}) = S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 3.$$

Решение исходной задачи найдем по соответствию между переменными (табл. 6.10).

Таблица 6.10

	Основные переменные	Балансовые переменные
Исходная задача	x_1 x_2	x_3 x_4 x_5
Двойственная задача	y_4 y_5	y_1 y_2 y_3
	Балансовые переменные	Основные переменные

Значение x_j определяем по последней симплексной таблице в строке Δ_i в соответствующей графе, причем значения x_j берем по модулю

$$x_1 \rightarrow y_4, \quad x_1 = |\Delta_4| = |-4| = 4,$$

$$x_2 \rightarrow y_5, \quad x_2 = |\Delta_5| = |-1| = 1.$$

Таким образом, решение исходной задачи: $\bar{x}_{\text{опт}} = (4, 1)$, при этом $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 3$.

Если исходная задача решена симплексным методом, то решение двойственной задачи может быть найдено по формуле $\bar{y}_{\text{опт}} = C A^{-1}$, где C — матрица-строка коэффициентов при базисных переменных целевой функции в оптимальном решении исходной задачи; A^{-1} — матрица, обратная матрице A , которая является матрицей коэффициентов базисных переменных системы ограничений исходной задачи в оптимальном решении.

Решим исходную задачу в канонической форме

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 2;$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2;$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 5;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5},$$

симплексным методом. Соответствующие результаты представлены в табл. 6.11.

Из табл. 6.11 следует, что $\bar{x}_{\text{опт}} = (4, 1)$, $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 3$. Запишем матрицы C и A :

$$C = (1 \quad -1 \quad 0), \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Таблица 6.11

c_i	БП	1	-1	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	-2	1	1	0	0	2
0	x_4	①	-2	0	1	0	2
0	x_5	1	1	0	0	1	5
	Δ_j	-1	1	0	0	0	0
0	x_3	0	-3	1	2	0	6
1	x_1	1	-2	0	1	0	2
0	x_5	0	③	0	-1	1	3
	Δ_j	0	-1	0	1	0	2
0	x_3	0	0	1	1	1	9
1	x_1	1	0	0	1/3	2/3	4
-1	x_2	0	1	0	-1/3	1/3	1
	Δ_j	0	0	0	2/3	1/3	3

а затем $\bar{y}_{\text{опт}} = CA^{-1}$:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = CA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение двойственной задачи $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, при этом $S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 3$.

Решение несимметричных задач. Рассмотрим решение несимметричных двойственных задач на конкретном примере.

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min;$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9;$$

$$x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 9y_1 + 6y_2 \rightarrow \max;$$

$$2y_1 + y_2 \leq 3;$$

$$-2y_1 + y_2 \leq 1;$$

$$3y_1 - 6y_2 \leq 3;$$

$$-y_1 - y_2 \leq 1.$$

где y_1, y_2 — произвольные по знаку.

Решив двойственную задачу, например, графическим методом, получим: $\bar{y}_{\text{опт}} = (1/2, 2)$, при этом $S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 33/2$.

По теореме 6.5 $\min L(\bar{x}) = S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 33/2$.

Подставим $\bar{y}_{\text{опт}}$ в систему ограничений двойственной задачи:

$$2 \cdot 1/2 + 2 \leq 3, \quad 3 = 3;$$

$$-2 \cdot 1/2 + 2 \leq 1, \quad 1 = 1;$$

$$3 \cdot 1/2 - 6 \cdot 2 \leq 3, \quad -21/2 < 3;$$

$$-1/2 - 2 \leq 1, \quad -5/2 < 1.$$

Третье и четвертое ограничения выполняются как строгие неравенства. Поэтому $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. С учетом этого система ограничений исходной задачи примет вид

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= 9, \\x_1 + x_2 &= 6.\end{aligned}$$

Решив данную систему, получим $\bar{x}_{\text{опт}} = (21/4, 3/4, 0, 0)$, при этом $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 33/2$.

Рассмотрим теперь решение задач с использованием обратной матрицы. Предположим, что решение исходной задачи известно: $\bar{x}_{\text{опт}} = (21/4, 3/4, 0, 0)$, $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 33/2$. Тогда решение $\bar{y}_{\text{опт}}$ двойственной задачи можно найти по формуле $\bar{y}_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1}$, где в данном случае

$$C = (3, 1), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем A^{-1} и затем $\bar{y}_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_{\text{опт}} = (3, 1) \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = (1/2, 2).$$

Итак, $\bar{y}_{\text{опт}} = (1/2, 2)$, при этом $S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 33/2$.

Решение смешанных задач. Смешанные двойственные задачи, как и задачи другого типа, можно решать с использованием теорем двойственности. Рассмотрим решение таких задач на примере.

Исходная задача

$$\begin{aligned}L(\bar{x}) &= x_1 - 6x_2 - x_3 \rightarrow \max; \\x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3; \\2x_1 + 3x_3 &\leq 4; \\x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned}S(\bar{y}) &= 3y_1 + 4y_2 \rightarrow \min; \\y_1 + 2y_2 &\geq 1; \\3y_1 &\geq -6; \\3y_1 + 3y_2 &\geq -1; \\y_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Найдем оптимальное решение прямой задачи: $\bar{x}_{\text{опт}} = (1, 0, 2/3)$, $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 1/3$.

По теореме 6.5 $\min S(\bar{y}) = \max L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 1/3$. Так как $x_1 > 0$, $x_3 > 0$, по теореме 6.6, первое и третье ограничения двойственной задачи выполняются в виде равенств:

$$\begin{aligned}y_1 + 2y_2 &= 1, \\3y_1 + 3y_2 &= -1,\end{aligned}$$

Решив систему, получим $y_1 = -5/3$, $y_2 = 4/3$. Значит, $\bar{y}_{\text{опт}} = (-5/3, 4/3)$, $S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 1/3$.

6.4.3. Экономический анализ задач с использованием теории двойственности

Рассмотрим задачу оптимального использования ресурсов с математической моделью

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Двойственная задача будет иметь вид

$$S(\bar{y}) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j, \quad j = \overline{1, n}; \\ y_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Теорема 6.7. Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение ее целевой функции, т.е.

$$y_i = \frac{\partial L}{\partial b_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad \blacksquare$$

При малых ΔL_i и Δb_i примем $\partial L_i \approx \Delta L_i$, $\partial b_i = \Delta b_i$, тогда

$$\Delta L_i \approx y_i \Delta b_i. \quad (6.18)$$

Для задачи оптимального использования сырья уравнение (6.18) показывает, что при изменении i -го ресурса оптимальный доход является линейной функцией от приращения этого ресурса, причем коэффициентом служит y_i — i -я компонента оптимального решения двойственной задачи.

Если y_i мало, то значительному увеличению i -го ресурса будет соответствовать небольшое увеличение оптимального дохода, т.е. ценность ресурса невелика.

Если $y_i = 0$, то при увеличении i -го ресурса оптимальный доход остается неизменным, значит, ценность этого ресурса равна нулю. В самом деле, сырье, запасы которого превышают потребность в нем, не представляет ценности для производства и его оценку можно принять за нуль.

Если y_i велико, то незначительному увеличению i -го ресурса будет соответствовать существенное увеличение оптимального дохода, т.е. ценность ресурса высока, а его уменьшение приведет к существенному сокращению выпуска продукции.

Переменную y_i считают некоторой характеристикой ценности i -го ресурса. В частности, при увеличении i -го ресурса на единицу ($\Delta b_i = 1$) оптимальный доход возрастает на y_i , что позволяет рассматривать y_i как условную цену, оценку единицы i -го ресурса (объективно обусловленную оценку).

Так как y_i представляет собой частную производную оптимального дохода по i -му ресурсу, y_i характеризует скорость изменения оптимального дохода при изменении i -го ресурса.

С помощью y_i можно определить степень влияния ограничений на значение целевой функции. Предельные значения (нижняя и верхняя границы) ограничений ресурсов, для которых y_i остаются неизменными, определяются по формулам

$$b_i^H = \min \frac{x_j}{d_{ij}}, \quad b_i^B = \max \frac{x_j}{d_{ij}},$$

где x_j — значение переменной в оптимальном решении; d_{ij} — элементы матрицы A^{-1} , обратной матрице A базиса оптимального решения.

Если в план включаются новые виды продукции, то их оценка находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{\text{опт } i} - c_j.$$

Если $\Delta_j < 0$, то новый вид продукции улучшает план. При $\Delta_j > 0$ новый вид продукции вводить нецелесообразно.

6.4.4. Применение теории двойственности в экономике

Рассмотрим применение теории двойственности в экономике на конкретном примере.

Пример 5. Организация выпускает три вида изделий, располагая при этом сырьем четырех типов: А, Б, В, Г в количестве 18, 16, 8 и 6 т соответственно. Нормы затрат каждого типа сырья на 1 ед. изделия первого вида составляют соответственно 1, 2, 1, 0 т, второго вида — 2, 1, 1, 1 т и третьего вида — 1, 1, 0, 1 т. Доход от реализации 1 ед. изделия первого вида равен 3 ден. ед., второго — 4 ден. ед., третьего — 2 ден. ед. Требуется:

- 1) составить план производства трех видов изделий, максимизирующий доход;
- 2) определить дефицитность сырья;

3) установить размеры максимального дохода при изменении количества сырья А на 6 т, Б — на -3 т, В — на 2 т, Г — на 2 т. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений на доход;

4) оценить целесообразность введения в план производства организации изделий нового вида (четвертого), нормы затрат на 1 ед. которого соответственно равны 1, 2, 2, 0 т, а доход составляет 15 ден. ед.

Решение. 1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ — план производства изделий трех видов, тогда математическая модель задачи примет вид

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18;$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16;$$

$$x_1 + x_2 \leq 8;$$

$$x_2 + x_3 \leq 6;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Решаем задачу симплексным методом, рассмотрим итоговую симплексную таблицу (табл. 6.12).

Таблица 6.12

c_i	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
0	x_4	0	0	0	1	0	-1	-1	4
2	x_3	0	0	1	0	1/2	-1	1/2	3
3	x_1	1	0	0	0	1/2	0	-1/2	5
4	x_2	0	1	0	0	-1/2	1	1/2	3
	Δ_j	0	0	0	0	1/2	2	3/2	33

Из табл. 6.12 следует, что $\bar{x}_{\text{опт}} = (5, 3, 3, 4, 0, 0, 0)$, $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 33$ (ден. ед.).

С помощью теорем двойственности находим $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 1/2, 2, 3/2, 0, 0, 0)$, $S(\bar{y}_{\text{опт}}) = 33$ (ден. ед.).

2. Наиболее дефицитным является сырье В, для которого двойственная оценка $y_3 = 2$. Менее дефицитно сырье Б, для которого $y_2 = 1/2$. Недефицитным является сырье А ($y_1 = 0$).

Для определения интервала устойчивости оценок найдем обратную матрицу для матрицы коэффициентов при базисных переменных в оптимальном решении системы ограничений. Базисными переменными в оптимальном решении являются x_1, x_2, x_3, x_4 . Матрица коэффициентов при этих переменных в систе-

ме ограничений имеет вид

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная матрице A , имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем интервал устойчивости оценок по видам сырья:

$$\begin{aligned} \Delta b_1^H &= \min \frac{x_{\text{опт}j}}{d_{1j}} = \min \frac{3}{1/2} = 6, \\ \Delta b_1^B &= \max \frac{(x_{\text{опт}})_j}{d_{1j}} = \max \frac{4}{1/2} = 8. \end{aligned}$$

Интервал устойчивости оценок по отношению к первому ограничению:

$$(b_1 - b_1^H, b_1 + b_1^B) = (18 - 6, 18 + 8) = (12, 26).$$

Аналогично определим интервалы устойчивости оценок по отношению к ограничениям на остальные виды сырья:

$$\begin{aligned} \Delta b_2^H &= \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{4}{1/2} \right\} = 3, & \Delta b_2^B &= \max \left| \frac{3}{-1/2} \right| = 6; \\ \Delta b_3^H &= \min \left\{ \frac{3}{1/2}, \frac{4}{1/2} \right\} = 6, & \Delta b_3^B &= \max \left| \frac{3}{-1} \right| = 3; \\ \Delta b_4^H &= \min \left\{ \frac{5}{1} \right\} = 5, & \Delta b_4^B &= \max \left\{ \left| \frac{3}{-1} \right|, \left| \frac{4}{-1} \right| \right\} = 4. \end{aligned}$$

Интервалы устойчивости оценок по отношению ко второму ограничению:

$$(16 - 3, 16 + 6) = (13, 22);$$

к третьему ограничению:

$$(8 - 6, 8 + 3) = (2, 11);$$

к четвертому ограничению:

$$(6 - 5, 6 + 4) = (1, 10).$$

3. Изменения сырья согласно условиям задачи на 6, -3 , 2, 2 т приводят к ограничению запаса сырья до 24, 13, 10, 8 т соответственно. Поскольку эти изменения находятся в пределах устойчивости оценок, на что указывают найденные интервалы, раздельное их влияние на прибыль определяется по формуле $L_i = \bar{y}_{\text{опт}i} b_i$, тогда

$$\max L_1 = y_{\text{опт}1} b_1 = 0 \cdot 6 = 0;$$

$$\max L_2 = y_{\text{опт}2} b_2 = 1/2 \cdot (-3) = -3/2;$$

$$\max L_3 = y_{\text{опт}3} b_3 = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$\max L_4 = y_{\text{опт}4} b_4 = 3/2 \cdot 2 = 3.$$

Суммарное влияние на прибыль

$$L_{\max} = \max L_1 + \max L_2 + \max L_3 + \max L_4 = 0 - 3/2 + 4 + 3 = 11/2 \text{ (ден. ед.)}.$$

Если изменение количества сырья не находится в пределах устойчивости оценок, то необходимо найти новые условные оценки, т.е. решить задачу симплексным методом с изменением количества сырья соответствующих видов.

4. Для оценки целесообразности введения в план производства изделий четвертого вида используем формулу

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^4 a_{ij} y_{\text{опт}i} - c_4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3/2 - 15 = -10 < 0.$$

Так как доход превышает затраты, то введение в план производства изделий четвертого вида целесообразно.

6.5. Транспортная задача

Транспортная задача — одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель — разработка наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных и повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятия, связанные со снабжением сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д.

В общем виде транспортную задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства $A_1, A_2, \dots, A_m$ имеется однородный груз в количестве соответственно $a_1, a_2, \dots, a_m$. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$ в количестве соответственно $b_1, b_2, \dots, b_n$. Стоимость перевозки 1 ед. груза (*тариф*) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij} .

Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти весь груз и имеющий минимальную стоимость, а также полностью удовлетворить потребности.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть закрытыми и открытыми.

Определение 9. Если суммарные запасы груза равны суммарной потребности в нем, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

то транспортная задача называется *закрытой*.

Определение 10. Если суммарные запасы груза не равны суммарной потребности в нем, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j,$$

то транспортная задача называется *открытой*.

6.5.1. Закрытая транспортная задача

Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Пусть x_{ij} — количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j . Условия задачи запишем в распределительную таблицу (табл. 6.13), которую будем использовать для нахождения решения.

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j; \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Оптимальным решением задачи является матрица

$$X_{\text{опт}} = (x_{ij})_{m \times n},$$

Таблица 6.13

B_j A_i		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
		b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
A_1	a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1j} c_{1j}	...	x_{1n} c_{1n}
A_2	a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2j} c_{2j}	...	x_{2n} c_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	...	x_{ij} c_{ij}	...	x_{in} c_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mj} c_{mj}	...	x_{mn} c_{mn}

удовлетворяющая системе ограничений, на которой достигается минимум целевой функции. Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако большое число переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод:

- нахождение исходного опорного решения;
- проверка этого решения на оптимальность;
- переход от одного опорного решения к другому.

Рассмотрим каждый из этих этапов.

Нахождение исходного опорного решения. Условия задачи и ее исходное опорное решение будем записывать в распределительную таблицу. Ячейки, в которых указан груз, называются *занятыми*, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные ячейки *незанятые*, или пустые, им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой ячейки будем записывать *тарифы*.

Существует несколько способов нахождения исходного опорного решения. Рассмотрим один из них — *метод минимального тарифа* (элемента). Согласно этому методу груз распределяется в первую очередь в те ячейки, в которых указан минимальный тариф перевозок c_{ij} . Далее поставки распределяются в незанятые ячейки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении груза может оказаться, что количество занятых ячеек меньше $m + n - 1$. В этом случае недостающее число занятых ячеек восполняется ячейками с *нулевыми поставками*; такие ячейки называют *условно занятыми*.

Нулевые поставки помещают в незанятые ячейки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждой строке и графе было не менее чем по одной занятой ячейке.

Рассмотрим нахождение исходного опорного решения транспортной задачи на конкретном примере.

Пример 6. На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количестве 140, 300, 160 т соответственно. Найти такой вариант поставок, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (ден. ед.):

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проверим, является ли данная транспортная задача закрытой.

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ (т);}$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ (т).}$$

Так как $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j$, данная транспортная задача закрытая. Найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа (табл. 6.14).

Таблица 6.14

$a_i \backslash b_j$		1	2	3
		140	300	160
1	90	90 2	– 5	– 2
2	400	– 4	300 1	100 5
3	110	50 3	– 6	60 8

Число занятых ячеек в таблице равно 5, кроме того, $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, т.е. условие невырожденности выполнено. Получили исходное опорное решение, которое запишем в виде матрицы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составляет:

$$L(X_1) = 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610 \text{ (ден. ед.)}.$$

Проверка решения на оптимальность. Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система $m + n$ действительных чисел u_i и v_j , удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых ячеек и $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ для свободных ячеек.

Числа u_i и v_j называют *потенциалами*. В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i .

Потенциалы u_i и v_j находят из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для занятых ячеек. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $u_1 = 0$, тогда можно определить остальные потенциалы. Так, если известен потенциал u_i , то $v_j = c_{ij} - u_i$, если известен потенциал v_j , то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$, которую называют *оценкой* свободных ячеек. Если все оценки свободных ячеек $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} \geq 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Проверим найденное в этом примере опорное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу столбец u_i и строку v_j (табл. 6.15).

Таблица 6.15

b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
a_i	90	90 2	5	2	0
	400	4	300 1	100 5	-2
3	110	50 3	6	60 8	1
	v_j	2	3	7	

Полагая $u_1 = 0$, запишем это значение в последней графе таблицы.

Рассмотрим занятую ячейку (1, 1) первой строки, которая расположена в первой графе, для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$. Следовательно, $v_1 = 2$, это значение запишем в последней строке таблицы. Далее нужно анализировать ту из занятых ячеек таблицы, для которых один из потенциалов известен.

Для занятой ячейки (3, 1): $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, значит, $u_3 = 1$.

Для ячейки (3, 3): $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.

Для ячейки (2, 3): $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.

Для ячейки (2, 2): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу.

Вычисляем оценки свободных ячеек:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0;$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

Получили одну оценку $\Delta_{13} > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

Переход от одного решения к другому. Наличие положительной оценки свободной ячейки ($\Delta_{ij} > 0$) при проверке опорного решения на оптимальность свидетельствует о том, что полученное решение не оптимально и для уменьшения значения целевой функции надо перейти к другому опорному решению. При этом надо перераспределить груз, перемещая его из занятых ячеек в свободные. Свободная ячейка становится занятой, а одна из ранее занятых ячеек — свободной.

Для свободной ячейки с $\Delta_{ij} > 0$ строят цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого, кроме одной, находятся в занятых ячейках; углы прямые, число вершин четное. Около свободной ячейки цикла ставят знак (+), затем поочередно проставляют знаки (−) и (+). У вершин со знаком (−) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузу, стоящему у вершин со знаком (+), и отнимают от груза у вершин со знаком (−). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим переход от одного опорного решения к другому на заданном примере.

Строим цикл для ячейки (1, 3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (−) и записываем соответствующие грузы.

90	
−	+
+	−
50	60

У вершин со знаком (−) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов,

стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл:

30	60
+	—
—	+
110	

Новое опорное решение будет иметь вид

$$X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность. для этого запишем полученное решение в распределительную таблицу (табл. 6.16), найдем потенциалы занятых и оценки свободных ячеек:

$$\Delta_{12} = -7; \quad \Delta_{21} = 1 > 0; \quad \Delta_{32} = -7; \quad \Delta_{33} = -5.$$

Таблица 6.16

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	30 2	5	60 2	0
2	400	4	300 1	100 5	3
3	110	110 3	6	8	1
v_j		2	-2	2	

Построим цикл для ячейки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$:

30	60
—	+
+	—
	100

Произведем перераспределение груза:

	90
+	—
—	+
30	70

Получим новое решение, которое занесем в таблицу (табл. 6.17). Проверим его на оптимальность:

$$\Delta_{11} = -1, \quad \Delta_{12} = -7, \quad \Delta_{32} = -6, \quad \Delta_{33} = -4.$$

Таблица 6.17

$b_j \backslash a_i$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2	5	2	0
2	400	30 4	300 1	70 5	3
3	110	110 3	6	8	2
v_j		1	-2	2	

Все оценки свободных ячеек отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное.

Таким образом,

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов:

$$L(X_{\text{опт}}) = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ (ден. ед.)}.$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на $1610 - 1280 = 330$ (ден. ед.).

Вырожденность в транспортных задачах. При решении транспортной задачи может оказаться, что число занятых ячеек меньше, чем $m + n - 1$. В этом случае задача имеет вырожденное решение. Для возможного его исключения целесообразно поменять местами поставщиков и потребителей или ввести в свободную ячейку с наименьшим тарифом нулевую поставку. Нуль помещают в такую ячейку, чтобы в каждой строке и графе было не менее одной занятой ячейки.

Рассмотрим вырожденность в транспортной задаче на примере.

Пример 7. Организация поставляет бутылки на четыре завода, которые производят прохладительные напитки. Она имеет три склада, причем на складе 1 находятся 6000 бутылок, на складе 2 — 3000 бутылок и на складе 3 — 4000 бутылок. Первому заводу требуется 4000 бутылок, второму заводу — 5000 бутылок, третьему заводу — 1000 бутылок, четвертому заводу — 3000 бутылок.

Матрицей задана стоимость перевозки (ден. ед.) одной бутылки от каждого склада к каждому заводу:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Как следует организовать доставку бутылок на заводы, чтобы стоимость перевозки была минимальной?

Решение. Запишем исходные данные в распределительную таблицу, найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа. Число заполненных ячеек равно 5, $m + n - 1 = 6$, следовательно, задача является вырожденной.

Для исключения вырожденности необходимо в какую-либо ячейку ввести нулевую поставку. Такая ячейка становится условно занятой, ее целесообразно определить при вычислении потенциалов занятых ячеек, она должна иметь наименьший тариф по сравнению с другими ячейками, которые могут быть условно занятыми.

В данном случае для нахождения потенциала u_3 поместим нулевую поставку в ячейку (3, 2), после чего представляется возможным вычислить остальные потенциалы (табл. 6.18).

Таблица 6.18

b_j a_i		1	2	3	4	u_i
		4000	5000	1000	3000	
1	6000	6 3000	4 3000	9	8 3000	0
2	3000	5 2000	3 2000	2 1000	8	-1
3	4000	2 4000	3 0	6	8	-1
v_j		3	4	3	8	

Оценки свободных ячеек будут равны:

$$\Delta_{11} = -3; \quad \Delta_{13} = -6; \quad \Delta_{21} = -3; \quad \Delta_{24} = -1; \quad \Delta_{33} = -4; \quad \Delta_{34} = -1.$$

Все оценки отрицательные, получили оптимальное решение

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 3000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 1000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов составит: $L(X_{\text{опт}}) = 52000$ ден. ед.

6.5.2. Открытая транспортная задача

В открытой транспортной задаче сумма запасов не совпадает с суммой потребностей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j.$$

1. Если

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

то объем запасов превышает объем потребления, все потребители будут удовлетворены полностью и часть запасов останется невывезенной. Для решения задачи вводят фиктивного $(n+1)$ -го потребителя, потребности которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

Модель такой задачи будет иметь вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} &= a_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n+1}; \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

2. Если

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j,$$

то объем потребления превышает объем запасов, часть потребностей останется неудовлетворенной. Для решения задачи вводим фиктивного $(m+1)$ -го поставщика:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

Модель такой задачи имеет вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m+1}; \quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad j = \overline{1, n}.$$

После введения фиктивного поставщика (потребителя) открытая транспортная задача становится закрытой и решается по рассмотренному алгоритму для закрытых транспортных задач, причем тариф, соответствующий фиктивному поставщику (потребителю), принимается больше или равным максимальному из всех транспортных тарифов, иногда его считают равным нулю. В значении целевой функции фиктивный поставщик (потребитель) не учитывается.

Пример 8. Составить оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40 и 130 т. Стоимость перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

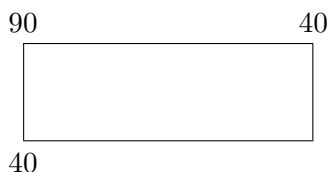
Решение. Запасы грузов у поставщиков: $\sum_{i=1}^3 a_i = 390$ т. Запросы потребителей: $\sum_{j=1}^4 b_j = 450$ т. Так как $\sum_{i=1}^3 a_i < \sum_{j=1}^4 b_j$, вводим фиктивного поставщика с грузом: $a_{4\phi} = 450 - 390 = 60$ т. Тариф фиктивного поставщика примем равным 20 ден. ед. (табл. 6.19).

Таблица 6.19

$\begin{matrix} & b_j \\ a_j & \end{matrix}$		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13	9	8	0
2	40	14	8	7	10	-5
3	110	3	15	20	6	-2
4φ	60	20	20	20	20	7
v_j		5	13	12	8	

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= -2, & \Delta_{13} &= 3, & \Delta_{21} &= -14, & \Delta_{24} &= -7, & \Delta_{32} &= -4, \\ \Delta_{33} &= -10, & \Delta_{4\Phi 1} &= -8, & \Delta_{4\Phi 3} &= -1, & \Delta_{4\Phi 4} &= -5.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & - \\ \hline \end{array}$$


$$\Delta_{11} = -2, \quad \Delta_{21} = -14, \quad \Delta_{23} = -3, \quad \Delta_{24} = -7, \quad \Delta_{32} = -4, \\ \Delta_{33} = -13, \quad \Delta_{401} = -8, \quad \Delta_{403} = -4, \quad \Delta_{404} = -5.$$

$\begin{matrix} b_j \\ a_j \end{matrix}$		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13	9	8	0
2	40	14	8	7	10	-5
3	110	3	15	20	6	-2
4 ϕ	60	20	20	20	20	7
v_j		5	13	9	8	

$$X_{\text{OIT}} = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов составляет: $L(X_{\text{опт}}) = 3120$ ден. ед.

6.5.3. Применение транспортных моделей в экономических задачах

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов c_{ij} имеют разный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. Перечислим типы подобных задач.

- Оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них c_{ij} является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Поскольку транспортная задача требует нахождения минимума, значения c_{ij} берутся с отрицательным знаком.

- Оптимальные назначения или проблема выбора. Имеется m механизмов, которые могут выполнять n различных работ с производительностью c_{ij} . Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу нужно назначить, чтобы добиться максимальной производительности.

- Задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции.

- Увеличение производительности автомобильного транспорта за счет минимизации порожнего пробега. Уменьшение порожнего пробега сократит количество автомобилей для перевозок, повысив их производительность.

- Запрещение перевозок в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей ячейке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту ячейку не будут заноситься перевозки.

Пример 9. На предприятии имеется три группы станков, каждая из которых может выполнять пять операций по обработке деталей (операции могут выполняться в любом порядке). Максимальное время работы каждой группы станков равно соответственно 100, 250, 180 ч. Каждая операция должна выполняться 100, 120, 70, 110, 130 ч соответственно.

Определить, сколько времени и для выполнения какой операции нужно использовать каждую группу станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Производительность каждой группы станков на каждую операцию задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Под тарифом понимаем производительность станков по операциям. Решаемая транспортная задача является закрытой:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j.$$

Поэтому воспользуемся алгоритмом решения закрытой транспортной задачи. Так как в задаче требуется найти максимум, а согласно алгоритму транспортной задачи находится минимум, тарифы умножим на -1 (табл. 6.21).

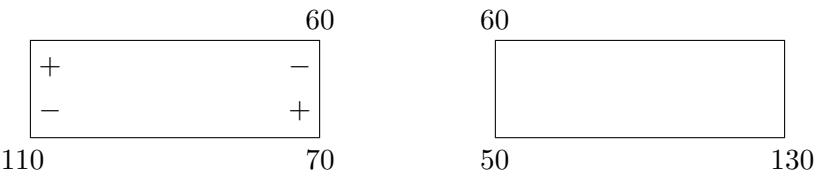
Таблица 6.21

$\begin{matrix} & b_j \\ a_i & \end{matrix}$		1	2	3	4	5	u_i
		100	120	70	110	130	
1	100	$\begin{matrix} 40 & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -11 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 60 & -5 \end{matrix}$	0
2	250	$\begin{matrix} 60 & -5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 120 & -10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 70 & -15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -2 \end{matrix}$	-2
3	180	$\begin{matrix} & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} & -6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 110 & -12 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 70 & -10 \end{matrix}$	-5
v_j		-3	-8	-13	-7	-5	

Находим потенциалы свободных ячеек:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= -3; & \Delta_{13} &= -2; & \Delta_{14} &= 3; & \Delta_{24} &= -6; & \Delta_{25} &= -5; \\ \Delta_{31} &= -4; & \Delta_{32} &= -5; & \Delta_{33} &= -12. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta_{14} > 0$, перераспределим грузы и получим



Полученное перераспределение груза занесем в табл. 6.22. Оценки свободных ячеек составляют:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= -3; & \Delta_{13} &= -2; & \Delta_{15} &= -3; & \Delta_{24} &= -9; & \Delta_{25} &= -8; \\ \Delta_{31} &= -1; & \Delta_{32} &= -2; & \Delta_{33} &= -9. \end{aligned}$$

Найденное решение является оптимальным, поскольку все оценки свободных ячеек отрицательные. Таким образом,

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Таблица 6.22

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4	5	u_i
		100	120	70	110	130	
1	100	40 -3	-5	-11	60 -10	-5	0
2	250	60 -5	120 -10	70 -15	-3	-2	-2
3	180	-4	-8	-6	50 -12	130 -10	-2
v_j		-3	-8	-13	-10	-8	

Первой группе станков целесообразно выполнять операции 1 и 4 продолжительностью 40 и 60 ч соответственно, второй группе — операции 1, 2 и 3 продолжительностью 60, 120 и 70 ч соответственно, третьей группе — операции 4 и 5 продолжительностью 50 и 130 ч, соответственно; при этом максимальное число обработанных деталей составит 5170 шт.

6.6. Целочисленное программирование

Некоторые задачи линейного программирования требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции (загрузка оборудования, распределение автобусного парка, судов, самолетов по рейсам и т.д.). В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i;$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \text{ целые, } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Ограничения задачи могут быть неравенствами. Знаки некоторых или всех неравенств могут быть «меньше или равно» $\leq$, «больше или равно» $\geq$.

6.6.1. Графический метод решения задач

Если в задаче линейного программирования две переменных, а в системе ограничений — только неравенства, такая задача может быть решена графическим методом.

В системе координат $x_1 O x_2$ находят область допустимых решений, строят вектор $\vec{C}$ и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению $\vec{C}$ для задач на максимум, определяют наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В случае когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа x_1 и x_2 , которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Аналогично решается задача на минимум. Целочисленному минимуму целевой функции будут соответствовать координаты вершины целочисленной решетки, лежащей в области допустимых решений и наиболее близкой к началу координат в направлении вектора $\vec{C}$.

Рассмотрим алгоритм графического решения задачи целочисленного программирования на конкретном примере.

Пример 10. Для улучшения финансового положения организация приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего в одном из цехов необходимо установить дополнительное оборудование, занимающее $19/3 \text{ м}^2$ площади. На приобретение дополнительного оборудования организация выделила 10 млн руб., причем она может купить оборудование двух видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 млн руб., 2-го вида — 3 млн руб. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования 2-го вида — на 4 ед.

Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2 м^2 площади, а для оборудования 2-го вида — 1 м^2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который даст возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что организация приобретает x_1 комплектов дополнительного оборудования 1-го вида и x_2 комплектов оборудования 2-го вида. Математическая модель задачи будет иметь вид

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$2x_1 + x_2 \leq \frac{19}{3}; \quad x_1 + 3x_2 \leq 10; \quad x_{1,2} \geq 0 \text{ целые.}$$

Получили задачу целочисленного программирования. Так как неизвестных только две (x_1 и x_2), ее решение можно найти графическим способом.

На рис. 6.7 $OABC$ — область допустимых решений (ОДР). Оптимальное решение задачи имеет в точке $B(9/5; 41/15)$; при этом максимальное значение целевой функции составляет $218/15$ ед., т.е. $x_{\text{опт}} = (9/5, 41/15)$, $\max L(\bar{x}) = \frac{218}{15} = 14\frac{8}{15}$ (ед.). Полученное оптимальное решение не целочисленное. В области допустимых решений строим целочисленную решетку.

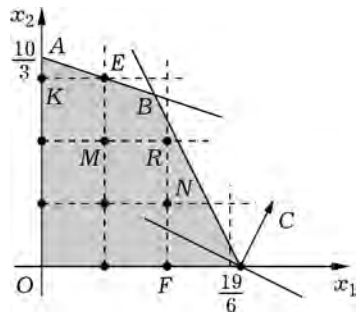


Рис. 6.7

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек, принадлежащих ОДР. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник $OABC$ многоугольником $OKEMRNF$, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Строим вектор $\bar{C} = (2, 4)$. Линию уровня перемещаем по направлению $\bar{C}$, получим в точке $E(1; 3)$ максимальное значение целевой функции

$$\max L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14 \text{ (ед.)}.$$

Следовательно, организации следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечит ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.

6.6.2. Метод Гóмори и его применение в экономических задачах

Целочисленное решение может быть найдено с использованием алгоритма, предложенного Гóмори, который состоит в следующем.

Симплексным методом находят оптимальное решение задачи. Если решение целочисленное, то задача решена. Если же оно не целочисленное и содержит хотя бы одну дробную координату, то накладывают дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до получения нового решения. Если и оно является не целочисленным, то вновь накладывают дополнительное ограничение по целочисленности. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет целочисленного решения.

Пусть получено оптимальное решение $\bar{x}_{\text{опт}} = (f_1, f_2, \dots, f_r, 0, 0, \dots, 0)$, которое не является целочисленным, и последний шаг симплексной таблицы представлен в табл. 6.23.

Таблица 6.23

c_i	БП	c_1	c_2	$\dots$	c_r	c_{r+1}	$\dots$	c_n	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	$\dots$	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$h_{1,r+1}$	$\dots$	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$h_{2,r+1}$	$\dots$	h_{2n}	f_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_r	x_r	0	0	$\dots$	1	$h_{r,r+1}$	$\dots$	h_{rn}	f_r
Δ_j		0	0	$\dots$	0	Δ_{r+1}	$\dots$	Δ_n	$L(\bar{x}_1)$

В табл. 6.23 r — ранг системы ограничений; $h_{i,r+1}$ — коэффициент симплексной таблицы в i -й строке $(r+1)$ -й графы; f_i — свободный член i -й строки.

Пусть f_i и хотя бы одно h_{ij} ($j = \overline{r+1, n}$, $i = \overline{1, r}$) — дробные числа.

Обозначим $[f_i]$ и $[h_{ij}]$ — целые части чисел f_i и h_{ij} . Целой частью числа называют наибольшее целое число, не превышающее это число.

Дробную часть чисел f_i и h_{ij} обозначим $\{f_i\}$ и $\{h_{ij}\}$, эти числа определяются следующим образом:

$$\{f_i\} = f_i - [f_i], \quad \{h_{ij}\} = h_{ij} - [h_{ij}].$$

Пример 11. Рассмотрим вычисление дробной и целой части:

$$\begin{aligned} \left[\frac{4}{5}\right] &= 0; & \left\{\frac{4}{5}\right\} &= \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5}; \\ \left[\frac{8}{3}\right] &= 2; & \left\{\frac{8}{3}\right\} &= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}; \\ \left[-\frac{4}{5}\right] &= -1; & \left\{-\frac{4}{5}\right\} &= -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}; \\ \left[-\frac{8}{3}\right] &= -3; & \left\{-\frac{8}{3}\right\} &= -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Если f_i и хотя бы одно значение h_{ij} дробное, то с учетом введенных обозначений целых и дробных чисел дополнительное ограничение по целочисленности примет вид

$$\{h_{i,r+1}\}x_{r+1} + \{h_{i,r+2}\}x_{r+2} + \dots + \{h_{in}\}x_n \geq \{f_i\}.$$

Примечания. 1. Если f_i дробное, а все h_{ij} целые числа, то задача не имеет целочисленного решения.

2. Ограничение целочисленности может быть наложено не на все переменные, а лишь на их часть. В этом случае задача является частично целочисленной.

Пример 12. Решим пример 10 методом Гóмори. Математическая модель задачи:

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3,$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 10,$$

$$x_{1,2} \geq 0 \text{ целые.}$$

Решение задачи симплексным методом представлено в табл. 6.24.

Таблица 6.24

c_i	БП	2	4	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	2	1	1	0	19/3
0	x_4	1	③	0	1	10
	Δ_j	-2	-4	0	0	0
0	x_3	⑤/3	0	1	-1/3	3
4	x_2	1/3	1	0	1/3	10/3
	Δ_j	-2/3	0	0	4/3	40/3
2	x_1	1	0	3/5	-1/5	9/5
4	x_2	0	1	-1/5	2/5	41/15
	Δ_j	0	0	2/5	6/5	218/15

Из симплексной таблицы $\bar{x}_{\text{опт}} = (9/5, 41/15)$, $\max L(\bar{x}) = 218/15$.

Найдем дробные части чисел $9/5$ и $41/15$ (1-я и 2-я строки 3-го шага):

$$\left\{ \frac{9}{5} \right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}; \quad \left\{ \frac{41}{15} \right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}; \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}.$$

Учитывая дробные части чисел $3/5$ и $-1/5$ (1-я строка 3-го шага):

$$\left\{ \frac{3}{5} \right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}; \quad \left\{ -\frac{1}{5} \right\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5},$$

составляем дополнительное ограничение целочисленности для 1-й строки 3-го шага:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geq \frac{4}{5} \quad \text{или} \quad \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 - x_5 = \frac{4}{5}.$$

Дальнейшие расчеты приведены в табл. 6.25. Из этой таблицы

$$\bar{x}_{\text{цел}} = (1, 3), \quad L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 14.$$

При сравнении полученного значения целевой функции целочисленного решения со значением при оптимальном решении можно заметить, что нахождение целочисленного решения приводит к уменьшению ее экстремального значения.

Таблица 6.25

c_i	БП	2	4	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	x_1	1	0	<u>$3/5$</u>	$-1/5$	0	$9/5$
	x_2	0	1	$-1/5$	$2/5$	0	$41/15$
	x_3	0	1	$-3/5$	$-4/5$	1	$4/5$
	Δ_j	0	0	$2/5$	$6/5$	$2/3$	$218/5$
2	x_1	1	0	0	-1	1	1
4	x_2	0	1	0	$2/3$	$-1/3$	3
0	x_3	0	0	1	$4/3$	$-5/3$	$4/3$
	Δ_j	0	0	0	$2/3$	$2/3$	14

6.7. Задачи о назначениях с несколькими целевыми функциями

6.7.1. Задача о назначениях

Задача о назначениях заключается в выборе такого распределения ресурсов по объектам, при котором минимизируется стоимость назначений. Предполагается, что каждый ресурс назначается только один раз и каждому объекту приписывается только один ресурс.

Различные случаи применения данной задачи указаны в табл. 6.26.

Таблица 6.26

Ресурсы	Объекты	Критерии эффективности
Рабочие	Рабочие места	Время
Грузовые автомобили	Маршруты	Затраты
Станки	Участки	Объем переработанной продукции
Экипажи	Рейсы	Время простоя
Коммивояжер	Города	Товарооборот

Матрица стоимостей назначения C определяется как: $C = (c_{ij})$, где c_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, — затраты, связанные с назначением i -го ресурса на j -й объект; n — число объектов или ресурсов.

Положим $x_{ij} = 1$, если i -й ресурс назначается на j -й объект, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда решение задачи о назначении может быть записано в виде матрицы $X = (x_{ij})_{n \times n}$.

Допустимое решение задачи называется *назначением*. Оно находится путем такого выбора элементов x_{ij} матрицы X , что в каждой строке и в каждом столбце будет только один выбранный элемент. Элементы c_{ij} матрицы C , соответствующие выбранным элементам $x_{ij} = 1$ матрицы X , отметим кружками.

Например,

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 3 & 8 \\ 6 & \textcircled{0} & 9 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение задачи о назначениях имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Математическая модель и алгоритм решения задач. Математическая постановка задачи о назначении записывается в виде

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} &= 0 \text{ или } 1. \end{aligned}$$

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой $a_i = b_j = 1$. Поэтому задачу о назначениях можно решать с помощью алгоритмов, предназначенных для транспортной задачи. Однако есть и другой метод, который более эффективен, так как он учитывает специфику математической модели. Этот метод называют *венгерским алгоритмом*. Он состоит из следующих шагов:

- 1) проведение преобразования строк и столбцов матрицы C ;
- 2) определение назначения;
- 3) модификация преобразованной матрицы.

1 - й шаг. Цель данного шага — получение максимально возможного числа нулевых элементов в матрице C . Для этого из всех элементов каждой строки вычитаем минимальный элемент соответствующей строки, а из всех элементов каждого столбца вычитаем минимальный элемент соответствующего столбца.

2 - й шаг. Если после выполнения 1-го шага в каждой строке и каждом столбце матрицы C можно выбрать по одному нулевому элементу, то полученное решение будет оптимальным назначением.

3 - й шаг. Если допустимое решение, состоящее из нулей, не найдено, то проводим минимальное число прямых через некоторые столбцы и строки так, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. Выбираем наименьший невычеркнутый элемент. Этот элемент вычитаем из каждого невычеркнутого элемента и прибавляем к каждому элементу, стоящему на пересечении проведенных прямых.

Если после проведения 3-го шага оптимальное решение не достигнуто, то процедуру проведения прямых следует повторять до тех пор, пока не будет получено допустимое решение.

Пример 13. Дана матрица ресурсов

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Распределить ресурсы матрицы C по четырем объектам.

Решение. 1 - й шаг. Значение минимальных элементов строк 1, 2, 3 и 4 равны 2, 4, 11 и 4 соответственно. Вычитая из элементов каждой строки соответствующее минимальное значение, получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Значения минимальных элементов столбцов 1, 2, 3 и 4 равны 0, 0, 5, 0 соответственно. Вычитая из элементов каждого столбца соответствующее минимальное значение, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

2 - й шаг. Ни одно назначение не получено, необходимо провести модификацию матрицы стоимостей.

3 - й шаг. Вычеркиваем столбец 1, строку 3, строку или столбец 2. Значение минимального невычеркнутого элемента равно 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ \hline 11 & 0 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем его из всех невычеркнутых элементов и, складывая его со всеми элементами, расположенными на пересечении двух линий, получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & \textcircled{0} & 3 \\ 13 & \textcircled{0} & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, оптимальное решение:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый ресурс направляем на 3-й объект, второй — на 2-й объект, третий ресурс — на 4-й объект, четвертый — на 1-й объект. Стоимость назначения: $9 + 4 + 11 + 4 = 28$.

Примечания. 1. Если исходная матрица не является квадратной, то нужно ввести фиктивные ресурсы или фиктивные объекты, чтобы матрица стала квадратной.

2. Если какой-либо ресурс не может быть назначен на какой-то объект, то соответствующая стоимость полагается равной достаточно большому числу M .

3. Если исходная задача является задачей максимизации, то все элементы матрицы C следует умножить на -1 и сложить с достаточно большим числом так, чтобы матрица не содержала отрицательных элементов. Затем следует решать задачу минимизации целевой функции.

4. Если число линий, необходимое для того, чтобы вычеркнуть нулевые элементы, равно числу строк или столбцов (квадратной матрицы), то существует назначение нулевой стоимости.

Применение задачи о назначении в экономике. Рассмотрим применение задачи о назначении в экономике на конкретном примере.

Пример 14. Цех имеет пять станков разных типов, каждый из которых может выполнять пять различных операций по обработке деталей. Известна производительность c_{ij} каждого станка при выполнении каждой операции, заданная матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определить, какую операцию и за каким станком следует закрепить, чтобы суммарная производительность была максимальной при условии, что за каждым станком закреплена только одна операция.

Решение. В задаче требуется найти максимум целевой функции, в то время как алгоритм метода дан для задач на минимум. Поэтому умножим матрицу C на -1 . Сложим полученную матрицу, элементы которой отрицательны, с достаточно большим положительным числом, например с числом 10. Получим:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минимальные элементы в строках равны 3, 4, 4, 6, 4. Вычтем их из соответствующих элементов матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как назначение не получено, вычеркиваем строку 2, столбцы 2, 4, 5:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Минимальный элемент равен 1. Вычитаем его из всех невычеркнутых элементов и складываем со всеми элементами, расположенными на пересечении двух линий, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & \textcircled{0} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{0} & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{0} & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оптимальное решение, соответствующее последней матрице:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Суммарная производительность: $6 + 6 + 3 + 6 + 7 = 28$.

Таким образом, наибольшая суммарная производительность станков цеха будет равна 28 деталям в единицу времени, при этом за первым станком надо закрепить 5-ю операцию, за вторым — 1-ю операцию, за третьим — 4-ю операцию, за четвертым — 3-ю операцию, за пятым станком — 2-ю операцию.

6.7.2. Задачи с несколькими целевыми функциями

В рассмотренных задачах линейного программирования математические модели имели одну целевую функцию, для которой находилось максимальное или минимальное значение экономического показателя. Однако на практике часто требуется найти экстремальные значения нескольких экономических показателей. В этом случае математическая модель имеет несколько целевых функций, причем некоторые из них могут требовать нахождения максимальных, а другие — минимальных значений. Поэтому ставится задача нахождения такого компромиссного (субоптимального) решения модели, в котором значения всех рассматриваемых экономических показателей были бы приближены к экстремальным.

Нахождение компромиссного решения относится к многокритериальным задачам оценки оптимальности.

В настоящее время методы решения подобных задач недостаточно разработаны, и на практике эти задачи решаются следующими способами:

1) ранжируют показатели, т.е. располагают их в порядке значимости, важности. Затем ищут решение, оптимальное по наиболее важному показателю. Получив допустимую величину изменения первого показателя, ищут решение по второму показателю, наилучшему в найденной области, и т.д. Порядок значимости и допустимые диапазоны выбирают произвольно;

2) находят единый (интегральный) показатель эффективности посредством суммирования произведений имеющихся показателей на «весовые» коэффициенты (коэффициенты важности показателей);

3) превращают все целевые функции, кроме одной, в ограничения.

Рассмотрим третий способ.

Математическая модель задачи. Дана математическая модель экономической задачи, в которой две целевые функции и система ограничений линейны. Найдём компромиссное решение по двум показателям

$$L_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad L_2 = \sum_{j=1}^n d_j x_j \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

где L_1, L_2 — значения целевых функций (экономические показатели), для упрощения записи опущены обозначения аргумента; c_j, d_j, a_{ij}, b_i — коэффициенты; x_j — переменные.

Решим задачу по каждому показателю в отдельности и найдём оптимальные значения $L_{1 \max}, L_{2 \min}$.

Продлав преобразования над целевыми функциями, получим математическую модель нахождения компромиссного решения задачи с двумя целевыми функциями. Найти минимум целевой функции

$$F = x_{n+1} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j + L_{1 \max} x_{n+1} &\geq L_{1 \max}, \\ \sum_{j=1}^n d_j x_j - L_{2 \min} x_{n+1} &\leq L_{2 \min}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где x_{n+1} — наибольшее относительное значение экономических показателей.

Математическая модель будет аналогичной в случае задач, имеющих три и более целевые функции.

Определение оптимального выпуска изделий при многокритериальных экономических показателях. Рассмотрим нахождение компромиссного решения экономической задачи, математическая модель которой имеет три целевые функции.

Пример 15. Организация выпускает два вида изделий по цене 2 тыс. руб. и 3 тыс. руб. соответственно. По результатам маркетинговых исследований спрос на изделия второго вида не менее 1 тыс. ед. в год. Для производства изделий используются материалы A и B , запасы которых составляют 18 и 15 т, соответственно. Норма расхода материала A при изготовлении 1 тыс. изделий составляет: для изделий 1-го вида — 3 т, для изделий 2-го вида — 5 т. Норма расхода материала B при изготовлении 1 тыс. изделий составляет: для изделий 1-го вида — 5 т, для изделий 2-го вида — 3 т. Себестоимость изделий 1-го вида — 1 тыс. руб., а 2-го вида — 2 тыс. руб.

Найти оптимальное решение по производству изделий 1-го и 2-го видов, чтобы прибыль и количество выпускаемых изделий были максимальными, а себестоимость — минимальной.

Решение. Обозначим: x_1 — количество изделий 1-го вида, тыс. ед.; x_2 — количество изделий 2-го вида, тыс. ед. Математическая модель задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} L_1 &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ L_2 &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ L_3 &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \min \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 18; \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 15; \\ x_2 &\geq 1; \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решим задачу по каждой целевой функции в отдельности при указанных ограничениях. Для первой целевой функции получим

$$\bar{x}_{1\text{опт}} = (1,3125, 2,8125), \quad L_{1\text{max}} = 4,125.$$

Для второй целевой функции L_2 :

$$\bar{x}_{2\text{опт}} = (1,3125, 2,8125), \quad L_{2\text{max}} = 11,063.$$

Для третьей целевой функции L_3 :

$$\bar{x}_{3\text{опт}} = (0, 1), \quad L_{3\text{min}} = 2,0.$$

Составим математическую модель задачи нахождения компромиссного решения:

$$F = x_3 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 4,125x_3 &\geq 4,125; \\2x_1 + 3x_2 + 11,063x_3 &\geq 11,063; \\x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 2; \\3x_1 + 5x_2 &\leq 18; \\5x_1 + 3x_2 &\leq 15; \\x_2 &\geq 1; \\x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Решая задачу, получим

$$\bar{x}_{\text{компр}} = (1,07, 1).$$

Следовательно, прибыль будет максимальной, а себестоимость минимальной, если организация будет выпускать 1,07 тыс. изделий 1-го вида и 1 тыс. изделий 2-го вида.

6.8. Параметрическое линейное программирование

Математическая модель задачи линейного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i; \\x_j &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},\end{aligned}$$

где c_j , a_{ij} , b_i — постоянные величины. На практике встречаются случаи, когда эти величины изменяются в некоторых интервалах. Кроме того, найдя оптимальное решение экономической задачи при заданных c_j , a_{ij} , и b_i , целесообразно выяснить, в каких допустимых пределах можно их менять, чтобы решение оставалось оптимальным. Для этого необходимо исследовать поведение оптимального решения задачи линейного программирования в зависимости от изменения коэффициентов ее целевой функции, системы ограничений, коэффициентов целевой функции и системы ограничений.

6.8.1. Линейное программирование с параметром в целевой функции

Математическая модель задачи. Пусть коэффициент c_j целевой функции изменяется в определенных пределах, тогда для удобства решения задачи его можно заменить выражением

$$c_j(\lambda) = c'_j + \lambda c''_j,$$

где c'_j, c''_j — постоянные; λ — параметр, который изменяется в некоторых пределах (в общем случае от $-\infty$ до ∞).

В общем виде задача линейного программирования с параметром в целевой функции записывается так:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n (c'_j + \lambda c''_j) x_j \rightarrow \max (\min) \quad (6.19)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i; \\ x_j &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Для каждого значения λ из промежутка (δ, φ) , где δ и φ — произвольные действительные числа, найти $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и обращающий в максимум (минимум) целевую функцию.

Решая задачу на максимум симплексным методом и исследуя ее решение в зависимости от параметра λ , получим выражения для определения нижнего (λ_1) и верхнего (λ_2) его значений:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{cases} \max\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{если существует хотя бы одно } \Delta''_j > 0, \\ -\infty, & \text{если все } \Delta''_j \leq 0; \end{cases} \\ \lambda_2 &= \begin{cases} \min\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{если существует хотя бы одно } \Delta''_j < 0, \\ \infty, & \text{если все } \Delta''_j \geq 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (6.21)$$

где Δ'_j — оценка симплексной таблицы, не содержащая параметр λ ; Δ''_j — оценка симплексной таблицы, содержащая параметр λ .

Если для целевой функции находится минимум, то границы изменения λ (λ_1 и λ_2) определяются так:

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{если существует хотя бы одно } \Delta''_j < 0, \\ -\infty, & \text{если все } \Delta''_j \geq 0; \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \min\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{если существует хотя бы одно } \Delta''_j > 0, \\ \infty, & \text{если все } \Delta''_j \leq 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения и геометрический смысл задачи. 1. Решаем задачу симплексным методом при конкретном значении параметра λ до получения оптимального решения.

2. Вычисляем значения параметров λ_1 и λ_2 .

3. Устанавливаем множество значений параметра λ , для которых полученное решение является оптимальным.

4. В случае необходимости вводим в базис вектор, соответствующий столбцу, из которого определялось значение параметра λ_2 .

5. Выбираем ключевую строку и ключевой элемент.

6. Рассчитываем оптимальное решение.

7. Находим новое множество значений λ , для которых решение останется оптимальным.

8. Вычисления повторяем до тех пор, пока весь отрезок $[\delta, \varphi]$ не будет исследован.

Рассмотрим графический смысл задачи (рис. 6.8). Пусть

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n (c'_j + \lambda c''_j) x_j \rightarrow \max.$$

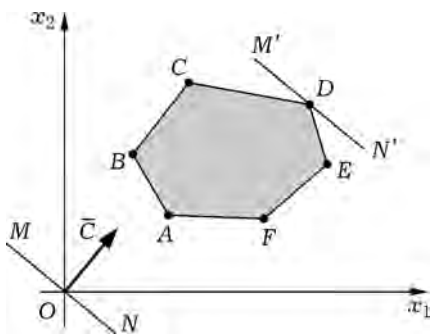


Рис. 6.8

Многоугольник $ABCDEF$ — область допустимых решений. При $\lambda = 0$ строим вектор $\bar{C}$ и, перемещая линию уровня MN по направлению вектора $\bar{C}$, получим в точке D оптимальное решение $\bar{x}(D)$, при котором $L(\bar{x})$ достигает максимума. При различных значениях λ линия уровня $M'N'$ будет определенным образом поворачиваться в точке D .

Пусть при $\lambda = \lambda_1$ прямая $M'N'$ проходит через сторону CD многоугольника допу-

стимых решений, а при $\lambda = \lambda_2$ проходит через сторону DE . Тогда значения $\bar{x}_{\text{опт}}$ и $L(\bar{x}_{\text{опт}})$ не изменяются до тех пор, пока $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Такая картина будет повторяться до получения нового оптимального решения, соответствующего новой целевой функции, для которой существует свой диапазон изменений λ .

Применение линейного программирования с параметром в целевой функции в экономических задачах. Рассмотрим применение линейного программирования с параметром в целевой функции на примере.

Пример 16. Предприятие должно выпустить два вида продукции — А и Б, для изготовления которых используются три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство единицы продукции видов А и Б, а также запасы сырья каждого вида приведены в табл. 6.27. Известно, что цена единицы продукции может изменяться для изделия А от 2 до 12 ден. ед., а для изделия Б — от 3 до 13 ден. ед., причем эти изменения определяются соотношениями $2 + \lambda$ и $13 - \lambda$, где $0 \leq \lambda \leq 10$.

Таблица 6.27

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 ед. продукции, т		Запасы сырья, т
	А	Б	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36

Для каждого из возможных значений цены единицы продукции данного вида найти такой план производства, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

Решение. Пусть x_1 — количество единиц продукции А; x_2 — количество единиц продукции Б. Математическая модель задачи:

$$L(\bar{x}) = (2 + \lambda)x_1 + (13 - \lambda)x_2 \rightarrow \max \quad (6.23)$$

при ограничениях

$$4x_1 + x_2 \leq 16; \quad (6.24)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 22; \quad (6.25)$$

$$6x_1 + 3x_2 \leq 36; \quad (6.26)$$

$$x_{1,2} \geq 0, \quad \lambda \in [0, 10].$$

Область допустимых решений — многоугольник $OABCD$ (рис. 6.9). При $\lambda = 0$, $L(\bar{x}) = 2x_1 + 13x_2$ строим $\bar{C} = (2, 13)$. Перемещая линию уровня по

направлению $\overline{C}$, находим, что в точке $A(0; 11)$ задача имеет оптимальное решение. Таким образом, при $\lambda = 0$, $\bar{x}_{1\text{опт}} = (0, 11)$, $L(\bar{x}_{\text{опт}}) = 143 - 11\lambda$.

Если уравнение прямой имеет вид $ax_1 + bx_2 + c = 0$, то угловой коэффициент прямой составит $k = -a/b$.

Угловым коэффициентом линии уровня, перпендикулярной $\overline{C}$, при произвольном значении λ составит $k = -\frac{2+\lambda}{13-\lambda}$.

Найдем область оптимальности $\bar{x}_{1\text{опт}}$. Значение $\bar{x}_{1\text{опт}}$ будет оставаться оптимальным для всех λ , при которых соответствующая линия уровня находится внутри угла, образованного прямыми $x_1 = 0$ и (ограничение (6.25)). Угловым коэффициентом прямой $2x_1 + 2x_2 = 22$ равен $k = -2/2 = -1$. По условию $\lambda_1 = 0$, λ_2 определяется из условия $-\frac{2+\lambda}{13-\lambda} = -1$, откуда $\lambda_2 = 11/2$. Значение $\bar{x}_1$ остается оптимальным при $\lambda \in [0, 11/2]$.

При $\lambda = 11/2$ линия уровня совпадает с прямой $2x_1 + 2x_2 = 22$ и оптимальными будут все точки, лежащие на этой прямой, в том числе и точка $B(1; 10)$, лежащая на пересечении прямых $2x_1 + 2x_2 = 22$ и $6x_1 + 3x_2 = 36$ (ограничение (6.25)).

Оптимальное решение будет сохраняться до тех пор, пока при изменении λ линия уровня не совпадает с прямой $6x_1 + 3x_2 = 36$, что будет соответствовать новому оптимальному решению $\bar{x}_{2\text{опт}}$.

Найдем новый диапазон изменения λ : $\lambda_1 = 11/2$, λ_2 определяется из условия $-\frac{-2+\lambda}{13-\lambda} = -2$. Отсюда $\lambda_2 = 8$.

Таким образом, получили $\lambda \in [11/2, 8]$, $\bar{x}_{2\text{опт}} = (1, 10)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 132 - 9\lambda$.

Аналогично определяем, что при $\lambda \in [2, 8]$, $\bar{x}_{3\text{опт}} = (2, 8)$, $L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 108 - 6\lambda$. Приведенное решение иллюстрируется на рис. 6.9.

Следовательно, при $\lambda \in [0, 11/2]$ необходимо производить 11 изделий Б, при этом стоимость продукции будет максимальной и равной $143 - 11\lambda$ ден. ед.; при $\lambda \in [11/2, 8]$ необходимо выпускать 1 изделие А и 10 изделий Б, при этом стоимость продукции является максимальной

и равной $132 - 9\lambda$ ден. ед.; при $\lambda \in [8, 10]$ необходимо производить 2 изделия А и 8 изделий Б, при этом стоимость продукции будет максимальной и равной $108 - 6\lambda$ ден. ед.

Найдем решение этой же задачи симплексным методом, для чего приведем задачу к каноническому виду:

$$L(\bar{x}) = (2 + \lambda)x_1 + (13 - \lambda)x_2 \rightarrow \max$$

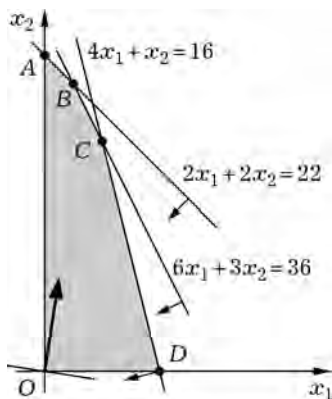


Рис. 6.9

при ограничениях

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 16;$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 22;$$

$$6x_1 + 3x_2 + x_5 = 36;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Первый этап решения приведен в табл. 6.27. Полагаем $\lambda_1 = -\infty$. Считая, что все $\Delta_j'' \neq 0$, получаем $11 - 2\lambda \geq 0$, $31/2 - \lambda/2 \geq 0$, откуда $\lambda_2 = \min \left\{ \frac{11}{2}, 31 \right\} = \frac{11}{2}$. Итак, получаем первый промежуток $\left[0, \frac{11}{2} \right]$. При $\lambda \in \left[0, \frac{11}{2} \right]$ имеем $\bar{x}_{1\text{опт}} = (0, 11, 5, 0, 3)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = 143 - 11\lambda$.

Таблица 6.28

c_i	БП	$2 + \lambda$	$13 - \lambda$	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	1	0	0	16
0	x_4	2	②	0	1	0	22
0	x_5	6	3	0	0	1	36
	Δ_j	$-2 - \lambda$	$-13 + \lambda$	0	0	0	0
0	x_3	3	0	1	$-1/2$	0	5
$13 - \lambda$	x_2	1	1	0	$1/2$	0	11
0	x_5	③	0	0	$-3/2$	1	3
	Δ_j	$11 - 2\lambda$	0	0	$31/2 - \lambda/2$	0	$143 - 11\lambda$

Продолжаем вычисления, полагая $\lambda \geq 11/2$. Результаты представлены в табл. 6.29. На этом этапе $\lambda_1 = 11/2$. Из неравенства $12 - 3\lambda/2 \geq 0$ находим $\lambda_2 = 8$. В результате получаем второй промежуток $\left[\frac{11}{2}, 8 \right]$. При $\lambda \in \left[\frac{11}{2}, 8 \right]$ имеем $\bar{x}_{2\text{опт}} = (1, 10, 2, 0, 0)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 132 - 9\lambda$.

Таблица 6.29

c_i	БП	$2 + \lambda$	$13 - \lambda$	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	①	-1	2
$13 - \lambda$	x_2	0	1	0	1	$-1/3$	10
$2 + \lambda$	x_1	1	0	0	$-1/2$	$-1/3$	1
	Δ_j	0	0	0	$12 - 3\lambda/2$	$-11/3 + 2\lambda/3$	$132 - 9\lambda$

На третьем этапе вычисления проводим, полагая $\lambda \geq 8$. Результаты представлены в табл. 6.30. Здесь $\lambda_1 = 8$, из неравенства $25/3 - 5\lambda/6 \geq 0$ находим $\lambda_2 = 10$. Получаем промежуток $[8, 10]$. При $\lambda \in [8, 10]$ имеем $\bar{x}_{3\text{опт}} = (2, 8, 0, 2, 0)$, $L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 108 - 6\lambda$.

Таблица 6.30

c_i	БП	$2 + \lambda$	$13 - \lambda$	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	0	0	1	1	-1	2
$13 - \lambda$	x_2	0	1	-1	0	$2/3$	18
$2 + \lambda$	x_1	1	0	$1/2$	0	$-1/6$	2
	Δ_j	0	0	$-12 + 3\lambda/2$	0	$25/3 - 5\lambda/6$	$108 - 6\lambda$

Получили следующие оптимальные решения в зависимости от изменения диапазона изменения λ :

$$\lambda \in \left[0, \frac{11}{2}\right], \quad \bar{x}_{1\text{опт}} = (0, 11), \quad L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = 143 - 11\lambda;$$

$$\lambda \in \left[\frac{11}{2}, 8\right], \quad \bar{x}_{2\text{опт}} = (1, 10), \quad L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 132 - 9\lambda;$$

$$\lambda \in [8, 10], \quad \bar{x}_{3\text{опт}} = (2, 8), \quad L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 108 - 6\lambda.$$

6.8.2. Линейное программирование с параметром в правых частях системы ограничений

В общем виде задача параметрического программирования с параметром в правых частях системы ограничений записывается в виде

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i + \lambda b''_i;$$
$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

При решении задачи симплексным методом необходимо исходить из условия, что справедливо неравенство

$$b'_i + \lambda b''_i \geq 0,$$

или руководствоваться формулами (6.21) и (6.22).

Пример 17. Решим задачу линейного программирования

$$L(\bar{x}) = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 \rightarrow \max;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 + \lambda;$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + \lambda;$$
$$-2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6\lambda;$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5},$$

$$\lambda \in (-\infty, \infty).$$

Решение. Составим симплексную таблицу (табл. 6.31). Из этой таблицы получаем $\bar{x}_{1\text{опт}} = (0, 5 - 3\lambda, 7 + 4\lambda, 13 - 2\lambda, 0)$. Решение будет оптимальным, если $b'_i + \lambda b''_i \geq 0$ при всех j , т.е. $7 + 4\lambda \geq 0$, $13 - 2\lambda \geq 0$, $5 - 3\lambda \geq 0$. Отсюда $\lambda \geq -7/4$, $\lambda \leq 13/2$, $\lambda \leq 5/3$. Сопоставляя эти неравенства (рис. 6.10), находим, что $\lambda \in [-7/4, 5/3]$, при этом $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = 25 + 26\lambda$.

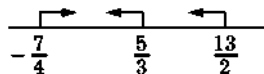


Рис. 6.10

Таблица 6.31

c_i	БП	3	-2	5	0	-4	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	x_3	1	1	1	0	0	$12 + \lambda$
0	x_4	2	-1	0	1	0	$8 + \lambda$
-4	x_5	-2	②	0	0	1	$10 - 6\lambda$
	Δ_i	10	-1	0	0	0	$20 + 29\lambda$
5	x_3	2	0	1	0	-1/2	$7 + 4\lambda$
0	x_4	1	0	0	1	1/2	$13 - 2\lambda$
-2	x_2	-1	1	0	0	1/2	$5 - 3\lambda$
	Δ_i	9	0	0	0	1/2	$25 + 26\lambda$

Выясним, имеются ли оптимальные решения при $\lambda > 5/3$.

Если $5 - 3\lambda < 0$, то, поменяв знаки в третьей строке, можно улучшить решение, введя в столбец БП переменную x_1 вместо x_2 (табл. 6.32). В результате получим $\bar{x}_{2\text{опт}} = (-5 + 3\lambda, 0, 17 - 2\lambda, 18 - 5\lambda, 0)$.

Таблица 6.32

c_i	БП	3	-2	5	0	-4	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	x_3	0	2	1	0	1/2	$17 - 2\lambda$
0	x_4	0	1	0	1	1	$18 - 5\lambda$
3	x_1	1	-1	0	0	-1/2	$-5 + 3\lambda$
	Δ_j	0	9	0	0	5	$70 - \lambda$

Это решение будет оптимальным, если выполняются все неравенства $b'_i + \lambda b''_i \geq 0$, т.е. $17 - 2\lambda \geq 0$, $18 - 5\lambda \geq 0$, $-5 + 3\lambda \geq 0$. Отсюда $\lambda \leq 17/2$, $\lambda \leq 18/5$, $\lambda \geq 5/3$. Сопоставляя неравенства (рис. 6.11), получаем промежуток $[5/3, 18/5]$. При $\lambda \in [5/3, 18/5]$ имеем $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 70 - \lambda$.

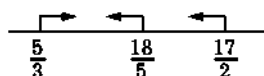


Рис. 6.11

Проверим, имеются ли оптимальные решения при $\lambda > 17/2$. Поменяем знаки в первой строке. Так как среди элементов первой строки нет положительных значений, заключаем, что при $\lambda > 17/2$ задача неразрешима.

Выясним, имеются ли оптимальные решения при $\lambda < -7/4$. Поменяв знаки в первой строке 2-го шага, можно улучшить решение, введя в столбец БП x_5 вместо x_3 (табл. 6.33). В результате получим $\bar{x}_{3\text{опт}} = (0, 12 + \lambda, 0, 20 + 2\lambda, -14 - 8\lambda)$.

Таблица 6.33

c_i	БП	3	-2	5	0	-4	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-4	x_5	-4	0	-2	0	1	$-14 - 8\lambda$
0	x_4	3	0	1	1	0	$20 + 2\lambda$
-2	x_2	1	1	1	0	0	$12 + \lambda$
	Δ_j	11	0	1	0	0	$32 + 30\lambda$

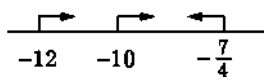


Рис. 6.12

Решение будет оптимальным, если $-14 - 8\lambda \geq 0$, $20 + 2\lambda \geq 0$, $12 + \lambda \geq 0$, откуда $\lambda \leq -7/4$, $\lambda \geq -10$, $\lambda \geq -12$. Сопоставляя эти неравенства (рис. 6.12), находим промежуток $[-10, -7/4]$. При $\lambda \in [-10, -7/4]$ имеем $L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 32 + 30\lambda$.

Из табл. 6.33 последнего шага следует, что при $\lambda < -10$ задача неразрешима, так как во второй строке все коэффициенты положительны.

6.8.3. Линейное программирование с параметром в целевой функции и правых частях системы ограничений

В общем виде задача линейного параметрического программирования с параметром в целевой функции и правых частях ограничений записывается в виде

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n (c'_j + \lambda c''_j) x_j \rightarrow \max (\min);$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_j + \lambda b''_j;$$
$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

где $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

При решении задачи симплексным методом необходимо пользоваться формулами (6.19), (6.20) или исходить из условий

$$b'_i + \lambda b''_i \geq 0, \quad \Delta_j \geq 0.$$

Пример 18. Решим задачу линейного программирования

$$L(\bar{x}) = (8 - 5\lambda)x_1 + (9 - 3\lambda)x_2 + (-3 + 5\lambda)x_3 - (2 + 4\lambda)x_4 \rightarrow \max;$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 24 - 12\lambda;$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = -18 + 10\lambda;$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4},$$

где $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Решение. Составим симплексную таблицу (табл. 6.34).

Таблица 6.34

c_i	БП	$8 - 5\lambda$	$9 - 3\lambda$	$-3 + 5\lambda$	$-2 - 4\lambda$	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$-3 + 5\lambda$	x_3	1	-1	1	0	$24 - 12\lambda$
$-2 - 4\lambda$	x_4	-1	②	0	1	$-18 + 10\lambda$
	Δ_j	$-9 + 14\lambda$	$-10 - 10\lambda$	0	0	$-100\lambda^2 + 208\lambda - 36$
$-3 + 5\lambda$	x_3	$1/2$	0	1	$1/2$	$15 - 7\lambda$
$9 - 3\lambda$	x_2	$-1/2$	1	0	$1/2$	$-9 + 5\lambda$
	Δ_j	$-14 + 9\lambda$	0	0	$5 - 5\lambda$	$-50\lambda^2 + 168\lambda - 126$

Запишем условия неотрицательности правых частей и коэффициентов Δ_j : $-14 + 9\lambda \geq 0$, $5 + 5\lambda \geq 0$, $15 - 7\lambda \geq 0$, $-9 + 5\lambda \geq 0$, или $\lambda \geq 14/9$, $\lambda \geq -1$, $\lambda \leq 15/7$, $\lambda \geq 9/5$. Сопоставляя эти неравенства (рис. 6.13), определяем промежуток $[9/5, 15/7]$. При $\lambda \in [9/5, 15/7]$ имеем $\bar{x}_{1\text{опт}} = (0, -9 + 5\lambda, 15 - 7\lambda, 0)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = -50\lambda^2 + 168\lambda - 126$.

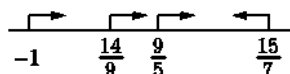


Рис. 6.13

Рассмотрим другие варианты. В случае $\lambda < 9/5$, который соответствует неравенству $-9 + 5\lambda < 0$, решение можно улучшить, поменяв знаки во второй строке и введя в графу БП переменную x_1 вместо x_2 (табл. 6.35).

Таблица 6.35

c_i	БП	$8 - 5\lambda$	$9 - 3\lambda$	$-3 + 5\lambda$	$-2 - 4\lambda$	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$-3 + 5\lambda$	x_3	0	①	1	1	$6 - 2\lambda$
$8 - 5\lambda$	x_1	1	-2	0	-1	$18 - 10\lambda$
	Δ_j	0	$-28 + 18\lambda$	0	$-9 + 14\lambda$	$40\lambda^2 - 134\lambda + 126$

Запишем условия неотрицательности правых частей и коэффициентов Δ_j : $6 - 2\lambda \geq 0$, $18 - 10\lambda \geq 0$, $-28 + 18\lambda \geq 0$, $-9 + 14\lambda \geq 0$, или $\lambda \leq 3$, $\lambda \leq 9/5$, $\lambda \geq 14/9$, $\lambda \leq 9/14$. Сопоставляя эти неравенства (рис. 6.14), определяем промежуток $[14/9, 9/5]$. При $\lambda \in [14/9, 9/5]$ имеем $\bar{x}_{2\text{опт}} = (18 - 10\lambda, 0, 6 - 2\lambda, 0)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 40\lambda^2 - 134\lambda + 126$.

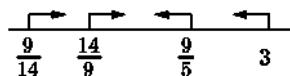


Рис. 6.14

В случае $\lambda < 14/9$, который соответствует неравенству $-28 + 18\lambda < 0$, можно получить новое оптимальное решение, введя в графу БП переменную x_2 вместо x_3 (табл. 6.36).

Таблица 6.36

c_i	БП	$8 - 5\lambda$	$9 - 3\lambda$	$-3 + 5\lambda$	$-2 - 4\lambda$	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$9 - 3\lambda$	x_2	0	1	1	1	$6 - 2\lambda$
$8 - 5\lambda$	x_1	1	0	2	1	$30 - 14\lambda$
	Δ_j	0	0	$28 - 18\lambda$	$19 - 4\lambda$	$76\lambda^2 - 298\lambda + 294$

Запишем условия неотрицательности правых частей и коэффициентов Δ_j :
 $6 - 2\lambda \geq 0$, $30 - 14\lambda \geq 0$, $28 - 18\lambda \geq 0$, $19 - 4\lambda \geq 0$, или $\lambda \leq 3$, $\lambda \leq 15/7$,
 $\lambda \leq 14/9$, $\lambda \leq 19/4$. Сопоставляя эти неравенства (рис. 6.15), определяем промежутки $[-\infty, 14/9]$.

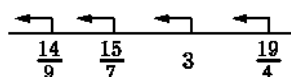


Рис. 6.15

При $\lambda \in [-\infty, 14/9]$ имеем

$$\bar{x}_{3\text{опт}} = (30 - 14\lambda, 6 - 2\lambda, 0, 0),$$

$$L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 76\lambda^2 - 298\lambda + 294.$$

Рассмотрим случай $\lambda > 15/7$, соответствующий неравенству $15 - 7\lambda < 0$. Для нахождения нового оптимального решения нужно сменить знаки в первой строке 2-го шага (табл. 6.35). Но в этой строке все коэффициенты положительные, поэтому получить новое решение не представляется возможным.

Итак:

если $\lambda \in [-\infty, 14/9]$, то $\bar{x}_{3\text{опт}} = (30 - 14\lambda, 6 - 2\lambda, 0, 0)$, $L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 76\lambda^2 - 298\lambda + 294$;

если $\lambda \in [14/9, 9/5]$, то $\bar{x}_{2\text{опт}} = (18 - 10\lambda, 0, 6 + 2\lambda, 0)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 40\lambda^2 - 134\lambda + 126$;

если $\lambda \in [9/5, 15/7]$, то $\bar{x}_{1\text{опт}} = (0, -9 + 5\lambda, 15 - 7\lambda, 0)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = -50\lambda^2 + 168\lambda - 126$;

если $\lambda \in [15/7, \infty]$, то задача неразрешима.

6.8.4. Транспортная параметрическая задача

Математическая модель задачи и алгоритм решения. Задача формулируется следующим образом: для всех значений параметра $\lambda \in [\delta, \varphi]$, где δ, φ — произвольные действительные числа, найти такие значения x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), которые обращают в минимум функцию

$$L(X) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (c'_{ij} + \lambda c''_{ij})$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Пользуясь методом потенциалов, решаем задачу при $\lambda = \delta$ до получения оптимального решения. Признаком оптимальности является условие

$$u_i + v_j - (c'_{ij} + \delta c''_{ij}) \leq 0 \text{ для незанятых ячеек,}$$

$$u_i + v_j = c'_{ij} + \delta c''_{ij} \text{ для занятых ячеек,}$$

где u_i, v_j — потенциалы строк и граф распределительной таблицы.

Условие совместимости транспортной задачи запишется в виде

$$\alpha_{ij} + \lambda \beta_{ij} \leq 0.$$

Значения α_{ij} и β_{ij} определяются из условий

$$\alpha_{ij} = u'_i + v'_j - c'_{ij}, \quad \beta_{ij} = u''_i + v''_j - c''_{ij},$$

где u'_i, v'_i, u''_j, v''_j определяются из системы уравнений

$$u'_i + v'_i = c'_{ij},$$

$$u''_j + v''_j = c''_{ij}.$$

Значения λ находятся в пределах $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, где

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max\left(-\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\right), & \text{если существует хотя бы одно } \beta_{ij} < 0, \\ -\infty, & \text{если все } \beta_{ij} \geq 0; \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \min\left(-\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\right), & \text{если существует хотя бы одно } \beta_{ij} > 0, \\ -\infty, & \text{если все } \beta_{ij} \leq 0. \end{cases}$$

Приведем алгоритм решения.

1. Решаем задачу при конкретном значении параметра $\lambda = \delta$ до получения оптимального решения.
2. Определяем α_{ij} и β_{ij} .
3. Вычисляем значения параметра λ .
4. Если $\lambda < \varphi$, перераспределяем поставки и получаем новое оптимальное решение. Если $\lambda = \varphi$, то процесс решения окончен.

Применение транспортной параметрической задачи в экономике. Рассмотрим применение транспортной параметрической задачи на конкретном примере.

Пример 19. Имеется три поставщика однородного товара с объемами поставок: $a_1 = 100$ т, $a_2 = 200$ т, $a_3 = 100$ т и четыре потребителя с объемами

потребления $b_1 = 80$ т, $b_2 = 120$ т, $b_3 = 150$ т, $b_4 = 50$ т. Стоимость транспортных расходов изменяется в определенном диапазоне в зависимости от загрузки дороги и задана матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{от 5 до 11} & \text{от 1 до 4} & 8 & \text{от 3 до 6} \\ 4 & 7 & \text{от 4 до 10} & \text{от 4 до 7} \\ 5 & 3 & 6 & \text{от 1 до 10} \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальное решение этой закрытой транспортной задачи, обеспечивающее минимальные транспортные затраты.

Решение. В матрицу расходов введем параметр λ , где $0 \leq \lambda \leq 3$. Получим

$$\begin{pmatrix} 5 + 2\lambda & 4 - \lambda & 8 & 3 + \lambda \\ 4 & 7 & 4 + 2\lambda & 7 - \lambda \\ 5 & 3 & 6 & 1 + 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Полагая $\lambda = 0$, решаем задачу методом потенциалов. Определим оптимальное решение перевозок, составим распределительную таблицу этого решения (табл. 6.37).

Таблица 6.37

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4	u_i
		80	120	150	50	
1	100	$5 + 2\lambda$ 30	$4 - \lambda$ 70	8	$3 + \lambda$	0
2	200	4 50	7	$4 + 2\lambda$ 150	$7 - \lambda$	$-1 - 2\lambda$
3	100	5	3 50	6	$1 + 3\lambda$ 50	$-1 + \lambda$
v_j		$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$	$5 + 4\lambda$	$2 + 2\lambda$	

В таблице u_i и v_j — потенциалы строк и столбцов. Для занятых ячеек они определяются из условия $u_i + v_j = c'_{ij} + \lambda c''_{ij}$.

Полагаем $u_1 = 0$. Тогда из $v_1 + u_1 = 5 + 2\lambda$ следует $v_1 = 5 + 2\lambda$, из $v_2 + u_1 = 4 - \lambda$ следует $v_2 = 4 - \lambda$.

Из условия $v_1 + u_2 = 4$, или $5 + 2\lambda + u_2 = 4$ получаем $u_2 = -1 - 2\lambda$. Из условия $v_3 + u_2 = 4 + 2\lambda$, или $-1 - 2\lambda + v_3 = 4 + 2\lambda$, находим $v_3 = 5 + 4\lambda$.

Аналогично находим, что $u_3 = -1 + \lambda$, $v_4 = 2 + 2\lambda$.

По формуле $\Delta_{ij} = u_j + v_j - (c'_{ij} + \lambda c''_{ij})$ находим оценки свободных ячеек:

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c'_{13} = 5 + 4\lambda + 0 - 8 = -3 + 4\lambda;$$

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - (c'_{14} + \lambda c''_{14}) = 2 + 2\lambda + 0 - 3 - \lambda = -1 + \lambda;$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c'_{22} = -1 - 2\lambda + 4 - \lambda - 7 = -4 - 3\lambda.$$

Аналогично находим, что $\Delta_{24} = -6 + \lambda$, $\Delta_{31} = -1 + 3\lambda$, $\Delta_{33} = -2 + 5\lambda$.

Решение, полученное при $\lambda = 0$, является оптимальным для всех значений параметра λ , удовлетворяющих условию $\Delta_{ij} \leq 0$, или $\alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij} \leq 0$. Из этого условия определяем границы изменения параметра λ :

$$\lambda_1 = \max\left(-\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\right) = -\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} = -\frac{3}{4}, \quad \beta_{ij} < 0;$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \min\left(-\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\right) &= \min\left\{-\frac{\alpha_{13}}{\beta_{13}}, -\frac{\alpha_{14}}{\beta_{14}}, -\frac{\alpha_{24}}{\beta_{24}}, -\frac{\alpha_{31}}{\beta_{31}}, -\frac{\alpha_{33}}{\beta_{33}}\right\} = \\ &= \min\left\{\frac{3}{4}, 1, 6, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\} = \frac{1}{3}, \quad \beta_{ij} > 0. \end{aligned}$$

Так как по условию задачи $\lambda \geq 0$, оптимальное решение сохраняется при $0 \leq \lambda \leq 1/3$. При этом минимальная стоимость транспортных расходов составляет:

$$\begin{aligned} L(X_{1\text{опт}}) &= 30 \cdot (5 + 2\lambda) + 70 \cdot (4 - \lambda) + 50 \cdot 4 + \\ &\quad + 150 \cdot (4 + 2\lambda) + 50 \cdot 3 + 50 \cdot (1 + 3\lambda) = 1430 + 440\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda \in [0, 1/3]$ имеем $L(X_{1\text{опт}}) = 1430 + 440\lambda$, а

$$X_{1\text{опт}} = \begin{pmatrix} 30 & 70 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить оптимальное решение при $\lambda \geq 1/3$, перераспределим поставки товаров в ячейку $(3, 1)$, где $\lambda_2 = 1/3$. Вновь полученное распределение представлено в табл. 6.38.

Находим оценки свободных ячеек:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 1 - 3\lambda, & \Delta_{13} &= -2 + \lambda, \\ \Delta_{14} &= -1 + \lambda, & \Delta_{22} &= -5, \\ \Delta_{24} &= -7 + 4\lambda, & \Delta_{33} &= -1 + 2\lambda. \end{aligned}$$

Таблица 6.38

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4	u_i
		80	120	150	50	
1	100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$	8	$3 + \lambda$	0
			100			
2	200	4	7	$4 + 2\lambda$	$7 - \lambda$	$-1 - 2\lambda$
		50		150		
3	100	5	3	6	$1 + 3\lambda$	$-1 + \lambda$
		30	20		50	
v_j		$6 - \lambda$	$4 - \lambda$	$6 + \lambda$	$2 + 2\lambda$	

Определим пределы изменения λ :

$$\lambda_1 = \max\left(-\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\right) = \frac{1}{3}, \quad \beta_{ij} < 0;$$
$$\lambda_2 = \min\left\{-\frac{\alpha_{13}}{\beta_{13}}, -\frac{\alpha_{14}}{\beta_{14}}, -\frac{\alpha_{24}}{\beta_{24}}, -\frac{\alpha_{31}}{\beta_{31}}, -\frac{\alpha_{33}}{\beta_{33}}\right\} =$$
$$= \min\left\{2, 1, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{ij} > 0.$$

Полученное в табл. 6.38 оптимальное решение сохраняется при $1/3 \leq \lambda \leq 1/2$. При этом

$$X_{2\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 150 & 0 \\ 30 & 20 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad L(X_{2\text{опт}}) = 1460 + 350\lambda.$$

Перераспределим поставки грузов в ячейку (3, 3) при $\lambda_2 = 1/2$. Получим новое распределение (табл. 6.39).

Таблица 6.39

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4	u_i
		80	120	150	50	
1	100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$	8	$3 + \lambda$	0
			100			
2	200	4	7	$4 + 2\lambda$	$7 - \lambda$	$-3 + 3\lambda$
		80		120		
3	100	5	3	6	$1 + 3\lambda$	$-1 + \lambda$
			20	30	50	
v_j		$7 - 3\lambda$	$4 - \lambda$	$7 - \lambda$	$2 + 2\lambda$	

Находим оценки свободных ячеек:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 2 - 5\lambda, & \Delta_{13} &= -1 - \lambda, \\ \Delta_{14} &= -1 + \lambda, & \Delta_{22} &= -6 + 2\lambda, \\ \Delta_{24} &= -8 + 6\lambda, & \Delta_{31} &= 1 - 2\lambda. \end{aligned}$$

Определим пределы изменения λ :

$$\lambda_1 = \max \left\{ -\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}, -\frac{\alpha_{13}}{\beta_{13}}, -\frac{\alpha_{31}}{\beta_{31}} \right\} = \max \left\{ \frac{2}{5}, -1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{ij} < 0;$$

$$\lambda_2 = \min \left\{ -\frac{\alpha_{14}}{\beta_{14}}, -\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}, -\frac{\alpha_{24}}{\beta_{24}} \right\} = \min \left\{ 1, 3, \frac{4}{3} \right\} = 1, \quad \beta_{ij} > 0.$$

Оптимальное решение сохраняется при $1/2 \leq \lambda \leq 1$. При этом

$$X_{3\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 20 & 30 & 50 \end{pmatrix}, \quad L(X_{3\text{опт}}) = 1490 + 290\lambda.$$

Перераспределим поставки товаров в ячейку (1, 4) при $\lambda_2 = 1$ (табл. 6.40).

Т а б л и ц а 6.40

$\begin{matrix} b_j \\ a_i \end{matrix}$		1	2	3	4	u_i
		80	120	150	50	
1	100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$	8	$3 + \lambda$	0
2	200	80	4	7	$4 + 2\lambda$	$7 - \lambda$
3	100	5	3	6	$1 + 3\lambda$	$-1 + \lambda$
v_j		$7 - 3\lambda$	$4 - \lambda$	$7 - \lambda$	$3 + \lambda$	

Находим оценки свободных ячеек:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -1 - 2\lambda, & \Delta_{13} &= -1 - \lambda, \\ \Delta_{22} &= -6 + 2\lambda, & \Delta_{24} &= -7 + 5\lambda, \\ \Delta_{31} &= 1 - 2\lambda, & \Delta_{34} &= 1 - \lambda. \end{aligned}$$

Определяем пределы изменения λ :

$$\lambda_1 = \max \left\{ -\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}, -\frac{\alpha_{13}}{\beta_{13}}, -\frac{\alpha_{31}}{\beta_{31}}, -\frac{\alpha_{34}}{\beta_{34}} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1 \right\} = 1, \quad \beta_{ij} < 0;$$

$$\lambda_2 = \min \left\{ -\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}, -\frac{\alpha_{24}}{\beta_{24}} \right\} = \min \left\{ 3, \frac{7}{5} \right\} = \frac{7}{5}, \quad \beta_{ij} > 0.$$

Полученное в табл. 6.40 оптимальное решение сохраняется при $1 \leq \lambda \leq 7/5$. При этом

$$X_{4\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 50 \\ 80 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 70 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(X_{4\text{опт}}) = 1540 + 240\lambda.$$

Таблица 6.41

$b_j \backslash a_i$		1	2	3	4	u_i
		80	120	150	50	
1	100	$5 + 2\lambda$	$4 - \lambda$ 100	8	$3 + \lambda$	0
2	200	4 80	7	$4 + 2\lambda$ 70	$7 - \lambda$ 50	$-3 + 3\lambda$
3	100	5	3 20	6 80	$1 + 3\lambda$	$-1 + \lambda$
v_j		$7 - 3\lambda$	$4 - \lambda$	$7 - \lambda$	$10 - 4\lambda$	

Перераспределим поставки грузов в ячейку (2, 4) при $\lambda_2 = 7/5$ (табл. 6.41).
Находим оценки свободных ячеек:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 2 - 5\lambda, & \Delta_{13} &= -1 - \lambda, \\ \Delta_{14} &= 7 - 5\lambda, & \Delta_{22} &= -6 + 2\lambda, \\ \Delta_{31} &= 1 - 2\lambda, & \Delta_{34} &= 8 - 6\lambda. \end{aligned}$$

Определяем пределы изменения λ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max \left\{ \frac{2}{5}, -1, \frac{7}{5}, \frac{1}{2}, \frac{8}{6} \right\} = \frac{7}{5}, & \beta_{ij} &< 0; \\ \lambda_2 &= \min \{ 3 \} = 3, & \beta_{ij} &> 0. \end{aligned}$$

Оптимальное решение сохраняется при $7/5 \leq \lambda \leq 3$. При этом

$$X_{5\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 70 & 50 \\ 0 & 20 & 80 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(X_{5\text{опт}}) = 1890 - 10\lambda.$$

Упражнения

Решить задачи с использованием графического метода.

6.1. $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \\ -2x_1 + x_2 \leq 6; \\ 4x_1 \leq 7; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ x_1 \leq 4; \\ 2x_2 \geq 5; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min; \\ 3x_1 + x_2 \geq 9; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

$$6.4. \begin{cases} 4x_2 \rightarrow \min; \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 18; \\ 2x_1 - x_2 \geq 0; \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 15; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$6.6. \begin{cases} 7x_1 - x_2 \rightarrow \max; \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 18; \\ 4x_1 + x_2 \leq 0; \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -12; \\ -7x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$6.5. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15; \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20; \\ x_2 \geq 5; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$6.7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 \geq 1; \\ x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 + 3x_2 \geq -3; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

6.8. В суточный рацион цыплят включают два продукта питания: Π_1 и Π_2 , причем продукта Π_1 в дневной рацион должно войти не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта Π_1 составляет 2 руб., продукта Π_2 — 4 руб. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта и минимальные нормы потребления указаны в табл. 6.42. Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей. Провести анализ задач с использованием графического метода.

Таблица 6.42

Питательные вещества	Минимальная норма потребления	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		Π_1	Π_2
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

6.9. Компания выпускает изделия двух типов A и B . При этом она использует сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и запасы сырья заданы в табл. 6.43. Выпуск одного изделия типа A приносит доход 300 руб., одного изделия типа B — 200 руб. Составить план производства, обеспечивающий компании наибольший доход.

Таблица 6.43

Показатель	Сырье, ед.			
	1	2	3	4
Изделие A	2	1	0	2
Изделие B	3	0	1	1
Запасы сырья	21	4	6	10

Таблица 6.44

6.10. Детали A и B обрабатывают на трех станках, причем каждую изготавливаемую деталь нужно последовательно обрабатывать на каждом из станков. Прибыль от реализации детали A — 100 руб., детали B — 160 руб. Исходные данные приведены в табл. 6.44. Определить про-

Стан-ки	Нормы времени на обработку одной детали, ч		Время работы станка, ч
	A	B	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

изводственную программу, максимизирующую прибыль при условии, что спрос на деталь A не менее 300 шт., на деталь B не более 200 шт.

Решить следующие задачи симплексным методом.

$$6.11. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.16. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$6.12. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \rightarrow \min; \\ 2x_2 + x_4 + 2x_5 = 4; \\ x_1 + x_2 + 4x_5 = 5; \\ x_3 + x_5 = 3; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

$$6.17. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.13. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max; \\ x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

$$6.18. \begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 \rightarrow \max; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 4; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$6.14. \begin{cases} 6 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 4; \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 3; \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

$$6.19. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8; \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 4; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.15. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 40; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$6.20. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

6.21. Предприятие при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя разными технологическими способами. Необходимые исходные данные приведены в табл. 6.45. Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

6.22. Торговая организация для продажи товаров трех видов использует ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида даны в табл. 6.46. Прибыль, получаемая от реализации одной партии товаров 1-го вида — 5 ден. ед., 2-го вида — 8 ден. ед., 3-го вида — 6 ден. ед. Определить

Таблица 6.45

Оборудование	Детали, ед.				Полезный фонд времени, станко-ч
	1		2		
	Технологические способы				
	1	2	1	2	
Фрезерное	2	2	3	0	20
Токарное	3	1	1	2	37
Сварочное	0	1	1	4	30
Прибыль, ден. ед.	11	6	9	6	

Таблица 6.46

Ресурсы	Вид товара			Объем ресурсов
	1	2	3	
Время, чел.-ч	0,5	0,7	0,6	370
Площадь, м ²	0,1	0,3	0,2	90

оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую организации максимальную прибыль.

6.23. Организация выпускает четыре пользующихся спросом изделия, причем месячная программа выпуска составляет по 10 изделий типа 1 и 3, 200 изделий типа 2 и 120 изделий типа 4. Нормы затрат сырья на единицу изделий разных типов приведены в табл. 6.47. Прибыль от реализации изделий типа 1 равна 6 ден. ед., изделий типа 2 — 2 ден. ед., изделий типа 3 — 2,5 ден. ед. и изделий типа 4 — 4 ден. ед.

Установить, является ли месячная программа выпуска изделий оптимальной, и если нет, то определить оптимальную месячную программу и дополнительный доход, который организация может при этом получить.

Таблица 6.47

Виды сырья	Нормы затрат на 1 изделие				Запасы сырья, ед.
	1	2	3	4	
1	5	1	0	2	1000
2	4	2	2	1	600
3	1	0	2	1	150

6.24. Предприятие может выпускать из металлов A_1 , A_2 , A_3 сплавы B_1 , B_2 , B_3 . В течение планируемого периода завод должен освоить не менее 640 т металла A_1 и 800 т металла A_2 , при этом металла A_3 может быть израсходовано не более 860 т. Определить минимальные затраты, если данные о нормах расхода и себестоимость приведены в табл. 6.48.

6.25. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с разной производительностью. Для изготовления ткани используется пряжа и красители.

Таблица 6.48

Показатель	Нормы расхода металла, т на усл. ед. сплава			Количество металла, т
	B_1	B_2	B_3	
Металл A_1	1,0	4,3	2,6	640
Металл A_2	5,0	1,5	3,0	800
Металл A_3	3,0	3,9	4,3	860
Себестоимость 1 т сплава, ден. ед.	18	15	15	

В табл. 6.49 указаны мощности станков в тысячах станко-часов, ресурсы пряжи и красителей в 1000 кг, производительности станков в метрах за час, нормы расхода пряжи и краски в килограммах на 1000 м и цена 1 м ткани.

Таблица 6.49

Показатель	Объем ресурсов	Нормы расхода по артикулам		
		1	2	3
Станки 1-го типа	30	20	10	25
Станки 2-го типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена, ден. ед.		15	15	20

По данным табл. 6.49 решить следующие задачи с использованием матричных игр:

- 1) определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию предприятия;
- 2) приняв условие, что количество тканей трех артикулов находится в отношении 2 : 1 : 3, рассчитать, какое максимальное количество ткани может выпустить предприятие;
- 3) установить оптимальный ассортимент, максимизирующий доход предприятия, если цена 1 м ткани составляет 8, 5 и 15 ден. ед. соответственно;
- 4) решить задачу при условии, что станки 1-го типа ткань первого артикула не производят.

6.26. Торговая организация разработала несколько вариантов плана продаж товаров на предстоящей ярмарке с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в табл. 6.50. Определить оптимальный план продажи товаров и цену игры.

Таблица 6.50

План продажи	Величина дохода в зависимости от спроса, ден. ед.		
	вариант 1	вариант 2	вариант 3
P_1	2	1	3
P_2	1	2	3
P_3	2	3	1

Составить математическую модель двойственных задач, решив одну из них, найти оптимальное решение другой.

$$6.27. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$6.32. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10; \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.28. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 1; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.33. \begin{cases} -x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \rightarrow \min; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.29. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.34. \begin{cases} -3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.30. \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 9; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$6.35. \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7; \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12; \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

$$6.31. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$6.36. \begin{cases} -2x_1 + x_2 \rightarrow \min; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 - 3x_2 \geq 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 3; \\ -x_1 + 3x_2 \leq -5; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.37. Для производства трех изделий A , B и C используются три вида сырья. Каждый из видов сырья используется в объеме, не превышающем 180, 210 и 236 кг соответственно. Нормы затрат каждого вида сырья на одно изделие и цена единицы изделий приведены в табл. 6.51. Определить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимального дохода. Составить для данной задачи двойственную и найти:

1) оптимальный план двойственной задачи;

2) интервалы устойчивости двойственных оценок;

3) увеличение максимального дохода при увеличении количества сырья 2-го и 3-го видов на 80 и 160 кг соответственно и при уменьшении количества сырья 1-го вида на 40 кг. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений;

Таблица 6.51

Изделие	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Цена изделия, ден.ед.
	1-й вид сырья	2-й вид сырья	3-й вид сырья	
A	4	2	1	10
B	3	1	3	14
C	1	2	5	12

4) целесообразность введения в план производства 4-го изделия, нормы затрат сырья на одно изделие которого составляют 2, 4 и 6 кг, а цена изделия равна 18 ден. ед.;

5) оптимальные планы исходной и двойственной задач, если количество сырья 1, 2 и 3-го видов равно 140, 250 и 240 кг соответственно.

6.38. Решить следующие транспортные задачи, заданные распределительными таблицами (табл. 6.52–6.55).

Таблица 6.52

$a_i \backslash b_j$	50	40	60	70
60	3	1	4	2
70	5	2	3	1
90	2	4	5	3

Таблица 6.53

$a_i \backslash b_j$	100	40	90	120
180	12	8	6	5
60	15	10	7	8
110	3	16	20	15

Таблица 6.54

$a_i \backslash b_j$	120	80	60
100	2	4	2
70	5	5	6
70	4	6	3
20	6	8	1

Таблица 6.55

$a_i \backslash b_j$	240	40	110
90	7	15	3
190	13	8	15
40	9	7	20
130	8	10	6

6.39. Требуется спланировать перевозку строительного материала с трех заводов на четыре строительных площадки с минимальными затратами, используя железнодорожную сеть. В течение каждого квартала на четырех площадках требуется соответственно 5, 10, 20, 15 вагонов строительных материалов. Возможности трех заводов равны соответственно 10, 15 и 25 вагонов в квартал. Условия задачи приведены в табл. 6.56. Числа на пересечении строк и граф таблицы означают стоимость перевозки одного вагона (ден. ед).

Таблица 6.56

Строительные площадки и их потребности		1	2	3	4
		5	10	20	15
Заводы и их возможности	1	8	3	5	2
	2	4	1	6	4
	3	1	9	4	3
	3	25			

6.40. Организация получила заказы на три вида выпускаемой ею продукции (бокалы, чашки и вазы), которые необходимо изготовить в течение недели. Размеры заказов: бокалы — 4000 шт., чашки — 2400 шт., вазы — 1000 шт.

Участок по изготовлению имеет три станка, на каждом из которых можно производить любой из заказанных видов продукции с одинаковой производительностью. Единичные затраты (ден. ед.) по каждому виду продукции различны в зависимости от используемого станка и приведены в табл. 6.57.

Т а б л и ц а 6.57

Станок	Бокалы	Чашки	Вазы
1	1,2	1,3	1,1
2	1,4	1,2	1,5
3	1,1	1,0	1,3

Кроме того, известно, что производственные мощности 2-го и 3-го станков на эту неделю составят по 3000 шт., а 1-го станка — 2000 шт. Используя модель транспортной задачи, найти план производства для заказанных видов продукции с наименьшей стоимостью и его значение.

6.41. Организация, специализирующаяся на производстве комплектующих к автомобилям марки «ВАЗ», получила заказ на три вида выпускаемой ею продукции: стартеры, генераторы, катушки зажигания. Размеры заказа: стартеров — 2000 шт., генераторов — 1500 шт., катушек зажигания — 1000 шт.

Для производства данной продукции организация имеет три типа оборудования, на каждом из которых можно производить любой из заказанных видов продукции с одинаковой производительностью. Затраты по каждому виду продукции (ден. ед.) различны в зависимости от используемого типа оборудования и приведены в табл. 6.58.

Т а б л и ц а 6.58

Оборудование	Стартер	Генератор	Катушка зажигания
1	1,1	3,5	4,0
2	2,3	3,2	6,5
3	1,0	3,0	5,3

Известно, что производственные мощности для каждого вида продукции 1-го оборудования составляют 1500 шт., 2-го оборудования — 1200 шт., 3-го оборудования — 1800 шт. Используя модель транспортной задачи, найти план производства заказанных видов продукции с наименьшими затратами.

6.42. Торговая организация имеет четыре магазина, расположенных в разных районах города (А, Б, В, Г). Поставки продукции в эти магазины осуществляются с двух складов Е, Ж, площади которых вмещают по 40 ед. продукции. В связи с повышением спроса организация планирует расширить площади магазинов, и их потребности в продукции составят 27, 25, 30 и 35 ед. Для удовлетворения текущего и будущего спроса планируется третий склад, площади которого позволят хранить 60 ед. продукции. Организация рассматривает два варианта его размещения. В табл. 6.59 даны транспортные издержки при перевозке продукции с двух существующих складов и двух вариантов размещения нового склада.

Оценить две транспортные модели и принять решение, какой вариант размещения нового склада выгоднее организации. Предполагается, что остальные издержки сохраняют существующие значения.

Таблица 6.59

Торговый склад	Транспортные издержки, ден. ед.			
	А	Б	В	Г
Е	70	85	55	120
Ж	110	90	75	110
Вариант 1	115	115	70	90
Вариант 2	135	95	80	75

Найти целочисленное решение следующих задач.

$$6.43. \begin{cases} 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_{1,2} \geq 0 \text{ целые.} \end{cases}$$

$$6.46. \begin{cases} 4x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 7; \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 15; \\ x_{1,2} \geq 0 \text{ целые.} \end{cases}$$

$$6.44. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min; \\ 2x_1 + x_2 \geq 9; \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 3; \\ x_{1,2} \geq 0 \text{ целые.} \end{cases}$$

$$6.47. \begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ -3x_1 + x_2 \leq 0; \\ x_{1,2} \geq 0 \text{ целые.} \end{cases}$$

$$6.45. \begin{cases} 3x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3; \\ x_{1,2} \geq 0 \text{ целые.} \end{cases}$$

$$6.48. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max; \\ x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22; \\ x_j \geq 0 \text{ целые, } j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

6.49. Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 34 тыс. руб. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 м².

Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины А стоимостью 3 тыс. руб., требующие 3 м² производственной площади и обеспечивающие производительность 2 т зерна за смену, и более мощные машины В стоимостью 4 тыс. руб., занимающие площадь 5 м² и обеспечивающие сортировку 3 т зерна за смену.

Определить оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий фермеру при данных ограничениях максимум общей производительности сортировки, если он может приобрести не более 8 машин типа В.

6.50. Организация имеет три механизма — А₁, А₂, А₃, каждый из которых может выполнять каждую из трех видов работ В₁, В₂ и В₃ с производительностью (в условных единицах), заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

в которой строки соответствуют видам механизмов, а столбцы — видам работ. Распределить механизмы по одному на каждую из работ так, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

6.51. Пять человек должны выполнить четыре вида работ, причем каждый работник с разной производительностью может выполнить любую работу. Предусматривается, что каждый работник в состоянии сделать только одну работу. Производительности работников при выполнении работ заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Распределить среди людей работу так, чтобы выполнить ее с максимальной производительностью.

6.52. Организация, имеющая четыре склада, получила четыре заказа, которые необходимо доставить разным потребителям. Складские помещения каждой базы имеют достаточное количество товара, чтобы выполнить любой один из этих заказов. Расстояния между каждой базой и каждым потребителем заданы матрицей

$$\begin{array}{cc} & \text{Базы} \\ \text{Потребители} & \begin{pmatrix} 68 & 72 & 75 & 83 \\ 56 & 60 & 58 & 63 \\ 38 & 40 & 35 & 45 \\ 47 & 42 & 40 & 45 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Как следует распределить заказы по базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

6.53. Организация объединяет три предприятия, каждое из которых производит три вида изделий. Себестоимости каждого изделия (в ден. ед.) при изготовлении на каждом предприятии заданы матрицей

$$\begin{array}{cc} & \text{Предприятие} \\ \text{Изделия} & \begin{pmatrix} 15 & 12 & 11 \\ 13 & 11 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Учитывая необходимость специализации каждого предприятия только по одному изделию, распределить производство изделий по предприятиям так, чтобы изделия имели минимальную себестоимость.

6.54. Компания разрабатывает план выпуска трех новых видов продукции. Она уже владеет пятью предприятиями и теперь на трех из них должны производиться новые

виды продукции — по одному виду на одно предприятие. Издержки производства единицы продукции (в ден. ед.) заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 20 & 23 & 38 & 15 & 35 \\ 8 & 29 & 6 & 35 & 35 \\ 5 & 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

в которой строки соответствуют видам продукции, а столбцы — предприятиям. Издержки сбыта единицы продукции (в ден. ед.) заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 20 & 50 & 20 & 10 & 13 \\ 7 & 90 & 8 & 35 & 60 \\ 5 & 5 & 4 & 15 & 6 \end{pmatrix}.$$

Объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос, и себестоимость единицы продукции каждого вида приведены в табл. 6.60. Закрепить между предприятиями выпуск продукции, обеспечивающий получение наибольшей прибыли за год.

Таблица 6.60

Вид продукции	Объем производства, ед.	Себестоимость, ден. ед.
1	35 000	55
2	160 000	50
3	54 000	30

В следующих многокритериальных задачах составить математическую модель нахождения компромиссного решения и найти его.

6.55. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + x_2 \rightarrow \min; \\ x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 1; \\ x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 + 3x_2 \geq -3; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

6.57. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24; \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 18; \\ x_2 \geq 1; \\ x_1 \leq 4; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

6.56. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 \rightarrow \min; \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12; \\ -2x_1 + 4x_2 \geq -8; \\ -x_2 \geq -3; \\ -x_1 \geq -7; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

6.58. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 4x_2 \rightarrow \min; \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 18; \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 16; \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

$$6.59. \begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_2 \leq 8; \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12; \\ x_1 \geq 2; \\ x_2 \geq 1; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$6.61. \begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 \rightarrow \min; \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 18; \\ 2x_1 - x_2 \geq 0; \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 15; \\ x_2 \geq 1; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$6.60. \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max; \\ x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 \leq 14; \\ 2x_1 + x_2 \leq 22; \\ x_1 \leq 5; \\ x_2 \leq 4; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Решить следующие задачи параметрического программирования с параметром в целевой функции.

$$6.62. \begin{cases} -\lambda x_1 - x_2 \rightarrow \min; \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ -x_1 - x_2 \leq 2; \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ x_1 - x_2 \leq 5; \\ x_{1,2} \geq 0; \\ 1 \leq \lambda \leq 11. \end{cases}$$

$$6.65. \begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + (2 - \lambda)x_2 \rightarrow \min; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 3; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}; \\ -1 \leq \lambda \leq 4. \end{cases}$$

$$6.63. \begin{cases} 5x_1 + (2 + \lambda)x_2 \rightarrow \max; \\ -x_1 + x_2 \leq 3; \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 51; \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 \geq 5; \\ x_{1,2} \geq 0; \\ 0 \leq \lambda \leq 10. \end{cases}$$

$$6.66. \begin{cases} (3 + 3\lambda)x_1 + 2x_2 + (5 - 6\lambda)x_3 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 40; \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 60; \\ x_1 + 4x_2 \leq 30; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}; \\ -\infty < \lambda < \infty. \end{cases}$$

$$6.64. \begin{cases} 2x_1 + (3 + 4\lambda)x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 \leq 12; \\ x_1 - x_2 \leq 10; \\ -x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_{1,2} \geq 0; \\ -\infty < \lambda < \infty. \end{cases}$$

6.67. Произвести транспортировку однородного груза с трех складов с объемами хранения 100, 200 и 200 т соответственно пяти оптовым рынкам с потребностями 80, 70, 100, 150 и 100 т соответственно. Стоимость транспортных расходов задана матрицей, причем стоимость перевозки груза со второго склада четвертому рынку и с третьего склада пятому рынку зависит от параметра λ , меняющегося в диапазоне $0 \leq \lambda \leq 2$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 8 & 5+2\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Определить план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы в заданном диапазоне изменения параметра λ .

6.68. Имеются четыре поставщика однородного груза с объемами поставок 100, 70, 70 и 20 т и три потребителя с объемами потребления 120, 80 и 60 т. Стоимость транспортных расходов задана матрицей, причем стоимость перевозки груза от четвертого поставщика до третьего потребителя зависит от параметра λ , изменяющегося в диапазоне $0 \leq \lambda \leq 9$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Глава 7. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В этой главе рассматривается нелинейное и динамическое программирование.

Нелинейное программирование — это раздел математического программирования, объединяющий теорию и методы решения таких задач отыскания экстремальных значений, в которых целевая функция или система ограничений (либо и та, и другая) содержит выражения, нелинейные относительно искомых величин.

Динамическое программирование — один из разделов математического программирования, в котором процесс принятия решения может быть разбит на отдельные этапы. В основе метода лежит принцип оптимальности, разработанный Р. Беллманом.

7.1. Формулировка модели

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: найти вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, & i = \overline{1, m_1}; \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, & i = \overline{m_1+1, m_2}; \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, & i = \overline{m_2+1, m}, \end{cases} \quad (7.1)$$

и доставляющий экстремум (наибольшее или наименьшее значение) целевой функции

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (7.2)$$

где $x_j, j = \overline{1, n}$, — переменные; $L, f, g_i, i = \overline{1, m}$, — заданные функции от n переменных; b_i — фиксированные значения.

В экономике это соответствует тому, что результаты деятельности предприятий возрастают или убывают непропорционально изменению масштабов использования ресурсов, например, из-за насыщения спроса на товары, когда каждую следующую единицу продать труднее, чем предыдущую.

Для задач нелинейного программирования в отличие от линейных задач нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

Из нелинейного программирования наиболее разработаны задачи, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Однако даже для таких задач оптимальное решение может быть найдено для определенного класса целевых функций. Например, когда целевая функция сепарабельная,

т.е. представляет собой сумму n функций $f_j(x_j)$, или квадратичная. Отметим, что в отличие от задач линейного программирования, где точками экстремума являются вершины многогранника решений, в задачах с нелинейной целевой функцией эти точки могут находиться внутри многогранника, на его ребре или в вершине.

В задачах нелинейного программирования требуется определить глобальный максимум или минимум целевой функции. *Глобальный максимум (минимум)* функции — это либо ее наибольшее (наименьшее) значение из локальных максимумов (минимумов), либо максимальное (минимальное) значение этой функции на границе замкнутой области ее определения.

Наличие локальных экстремумов затрудняет решение задач, так как большая часть существующих методов нелинейного программирования не позволяет установить, является найденный экстремум локальным или глобальным. Поэтому не исключено, что в качестве оптимального решения будет принят локальный экстремум, который может существенно отличаться от глобального.

7.1.1. Графический метод

Рассмотрим примеры решения задач нелинейного программирования с двумя переменными, причем их целевые функции и системы ограничений могут быть заданы в линейном и нелинейном виде. Как и задачи линейного программирования, указанные задачи могут быть решены графически.

Задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений. Случай, когда в задаче нелинейного программирования целевая функция линейна, а система ограничений нет, рассмотрим на примере.

Пример 1. Найти глобальные экстремумы функции $L = 2x_1 + x_2$ при ограничениях

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 16; \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. Область допустимых решений — часть круга радиуса 4, расположенная в первой четверти (рис. 7.1).

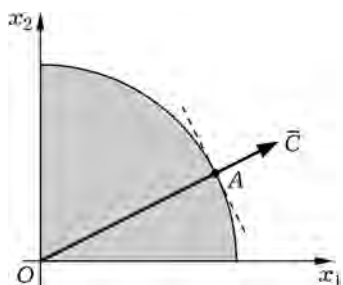


Рис. 7.1

Линиями уровня целевой функции являются параллельные прямые с угловым коэффициентом, равным -2 . Глобальный минимум достигается в точке $O(0; 0)$, глобальный максимум — в точке A касания линии уровня и окружности. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную линии уровня. Прямая проходит через начало координат, имеет угловой коэффициент, равный $1/2$, и уравнение $x_2 = x_1/2$.

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 16, \\ x_2 = x_1/2, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 8\sqrt{5}/5$, $x_2 = 4\sqrt{5}/5$, $L_{\max} = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}$.

Следовательно, глобальный минимум, равный нулю, достигается в точке $O(0; 0)$, глобальный максимум, равный $4\sqrt{5}$, в точке $A(8\sqrt{5}/5; 4\sqrt{5}/5)$.

Задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений. Рассмотрим два примера, в которых система ограничений линейна, а целевая функция нет.

Пример 2. Найти глобальные экстремумы функции $L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 \leq 12, \quad x_1 + x_2 \leq 9, \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. В рассматриваемой задаче область допустимых решений представляет собой многоугольник $OABD$ (рис. 7.2). Линиями уровня будут окружности с центром в точке O_1 . Максимальное значение целевая функция имеет в точке $D(9; 0)$, минимальное — в точке $O_1(2; 3)$. При этом

$$L(D) = (9 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 58.$$

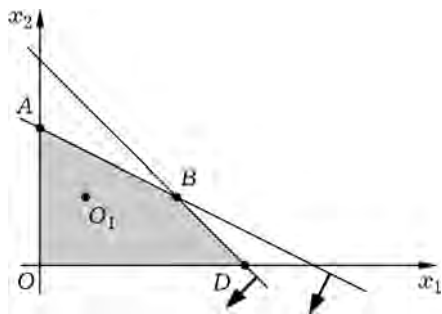


Рис. 7.2

Таким образом, глобальный максимум, равный 58, достигается в точке $D(9; 0)$, глобальный минимум, равный нулю, — в точке $O_1(2; 3)$.

Пример 3. Найти глобальные экстремумы функции $L = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$ при ограничениях

$$2x_1 + 3x_2 \leq 14, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 15, \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. В этой задаче область допустимых решений — многоугольник $OABD$ (рис. 7.3). Линии уровня представляют собой окружности с центром в точке $O_1(6; 3)$. Глобальный максимум находится в точке $O(0; 0)$, как самой удаленной от точки O_1 . Глобальный минимум расположен в точке E , находящейся на пересечении прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$ и перпендикуляра к этой прямой, проведенного из точки O_1 .

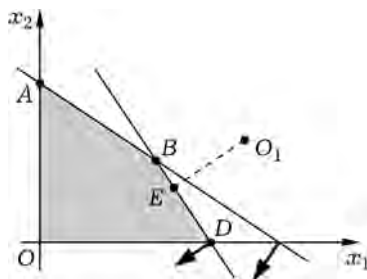


Рис. 7.3

Найдем координаты точки E : угловой коэффициент прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$ равен $-3/2$, поэтому угловой коэффициент перпендикуляра O_1E равен $2/3$. По уравнению прямой, проходящей через точку O_1 с угловым коэффициентом $2/3$, получим: $x_2 - 3 = \frac{2}{3}(x_1 - 6)$, откуда $2x_1 - 3x_2 = 3$.

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15, \end{cases}$$

найдем координаты точки E : $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$, при этом $L(E) = 1053/169$.

Кроме того, координаты точки E можно определить следующим методом. Продифференцировав выражение $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$ как неявную функцию от x_1 , получим $2(x_1 - 6) + 2(x_2 - 3)x'_2 = 0$, откуда

$$x'_2 = \frac{6 - x_1}{x_2 - 3}.$$

Приравниваем полученное значение тангенсу угла наклона прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$:

$$\frac{6 - x_1}{x_2 - 3} = -\frac{3}{2} \quad \text{или} \quad 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Решаем полученное уравнение совместно с уравнением прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$. Получим координаты точки E : $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$.

Итак, глобальный максимум, равный 52, находится в точке $O(0; 0)$; глобальный минимум, равный $1053/169$, — в точке $E(51/13; 21/13)$.

Задача с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений. Подобную задачу рассмотрим на примерах.

Пример 4. Найти глобальные экстремумы функции $L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ при ограничениях

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 16; \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. Областью допустимых решений является часть круга радиуса 4, расположенная в первой четверти (рис. 7.4). Линиями уровня являются окружности с центром в точке $O_1(2; 1)$.

Глобальный минимум достигается в точке O_1 , глобальный максимум — в точке $A(0; 4)$. Целевая функция в точке A будет равна:

$$L(A) = (0 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = 13.$$

Таким образом, глобальный минимум, равный нулю, достигается в точке $O_1(2; 1)$, глобальный максимум, равный 13, находится в точке $A(0; 4)$.

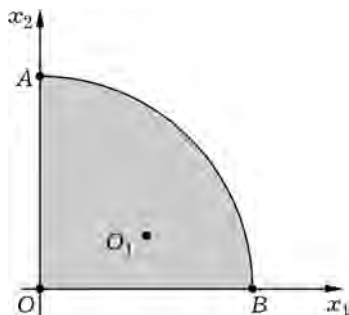


Рис. 7.4

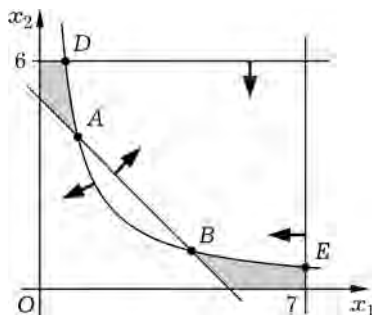


Рис. 7.5

Пример 5. Найти глобальные экстремумы функции $L = x_1^2 + x_2^2$ при ограничениях

$$x_1 x_2 \leq 4, \quad x_1 + x_2 \geq 5, \quad x_1 \leq 7, \quad x_2 \leq 6, \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. Область допустимых решений рассматриваемой задачи не является выпуклой и состоит из двух частей (рис. 7.5). Линиями уровня являются окружности с центром в точке $O(0; 0)$.

Найдем координаты точек A и B , решая систему

$$x_1 x_2 = 4, \quad x_1 + x_2 = 5.$$

Получим $A(1; 4)$, $B(4; 1)$. В этих точках функция имеет глобальные минимумы, равные 17. Найдем координаты точек D и E , решая системы

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_2 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_1 = 7, \end{cases}$$

откуда точка $D(2/3; 6)$ и $L(D) = 328/9$, точка $E(7; 4/7)$ и $L(E) = 2417/49$.

Таким образом, целевая функция имеет два глобальных минимума, равные 17, в точках $A(1; 4)$ и $B(4; 1)$, глобальный максимум, равный $2417/49$, достигается в точке $E(7; 4/7)$.

7.1.2. Дробно-линейное программирование

Математическая модель задачи. Дробно-линейное программирование относится к нелинейному программированию, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде.

Задача дробно-линейного программирования в общем виде записывается так:

$$L = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \rightarrow \max (\min) \quad (7.3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} — постоянные коэффициенты и $\sum_{j=1}^n d_j x_j \neq 0$.

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования с двумя неизвестными, имеющую следующий вид:

$$L = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \rightarrow \max (\min) \quad (7.5)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ x_{1,2} &\geq 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Будем считать, что $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Множество допустимых решений этой задачи представляет собой многоугольник (многоугольник решений), определяемый ограничениями (7.6). Предполагаем, что многоугольник решений не является пустым множеством.

Из представления (7.5) целевой функции получаем: $Ld_1x_1 + Ld_2x_2 = c_1x_1 + c_2x_2$, откуда $x_2(Ld_2 - c_2) = x_1(c_1 - Ld_1)$, что позволяет найти x_2 :

$$x_2 = x_1 \frac{c_1 - Ld_1}{Ld_2 - c_2}.$$

Итак, $x_2 = kx_1$, где

$$k = \frac{c_1 - Ld_1}{Ld_2 - c_2}.$$

Уравнение $x_2 = kx_1$ задает прямую, проходящую через начало координат. При некотором фиксированном значении L угловой коэффициент k тоже фиксирован и прямая занимает определенное положение. При изменении значений L прямая $x_2 = kx_1$ будет поворачиваться в начале координат (рис. 7.6).

Установим, как будет вести себя угловой коэффициент k при монотонном возрастании L . Найдем производную k по L :

$$\frac{dk}{dL} = \frac{-d_1(Ld_2 - c_2) - d_2(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)^2} = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(Ld_2 - c_2)^2}.$$

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель от L не зависит. Следовательно, производная имеет постоянный знак и при увеличении L угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет поворачиваться в одну сторону. Если угловой коэффициент прямой имеет положительное значение, то прямая вращается против движения часовой стрелки, при отрицательном значении k — по часовой стрелке. Установив направление вращения, находим вершину или вершины многогранника, в которых функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо устанавливаем неограниченность задачи. При этом возможны следующие случаи:

- 1) многогранник решений ограничен, максимум и минимум достигаются в его угловых точках (рис. 7.7);
- 2) многогранник решений не ограничен, однако существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения (рис. 7.8);
- 3) многогранник решений не ограничен, один из экстремумов имеется. Например, минимум достигается в одной из вершин многогранника решений и имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 7.9);

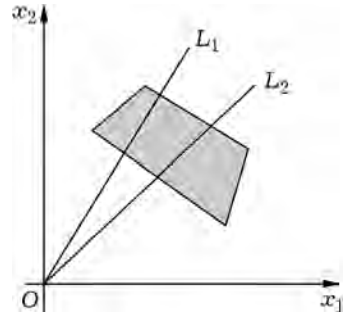


Рис. 7.6

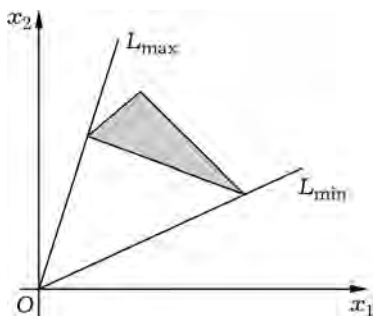


Рис. 7.7

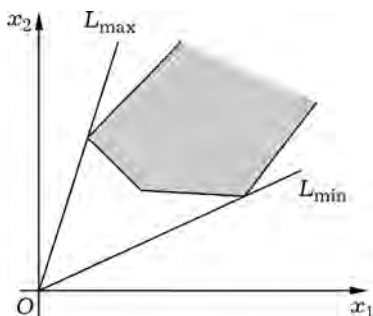


Рис. 7.8

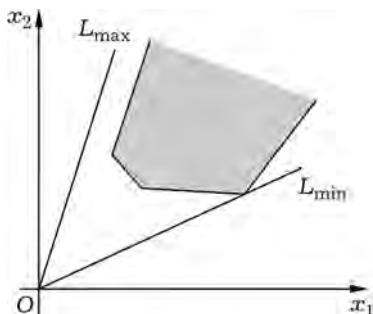


Рис. 7.9

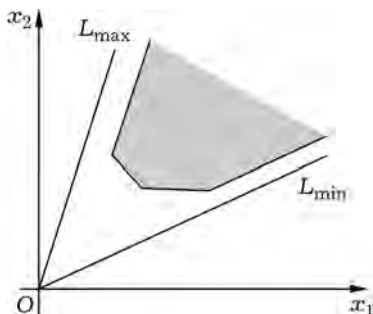


Рис. 7.10

4) многогранник решений не ограничен. Максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 7.10).

Экономическая интерпретация и алгоритм решения задач. Математическая модель задачи дробно-линейного программирования может быть использована для определения рентабельности производства изделий, затрат в расчете на 1 рубль выпускаемой продукции, себестоимости изделий.

Введем обозначения:

r_j — прибыль предприятия от реализации единицы продукции j -го вида;

x_j — количество выпущенной продукции j -го вида;

s_j — цена единицы продукции j -го вида;

c_j — себестоимость производства единицы продукции j -го вида;

d_j — затраты на производство одного изделия j -го вида.

Задача рентабельности (P) производства продукции имеет вид

$$P = \frac{\sum r_j x_j}{\sum c_j x_j} \rightarrow \max.$$

Задача определения затрат ($З_p$) в расчете на 1 рубль товарной продукции записывается в виде

$$З_p = \frac{\sum c_j x_j}{\sum s_j x_j} \rightarrow \min.$$

Задача нахождения средней себестоимости (c) продукции имеет вид

$$c = \frac{\sum d_j}{\sum x_j} \rightarrow \min.$$

Указанные математические модели имеют системы ограничений в зависимости от условий конкретной задачи.

Приведем алгоритм решения задач.

1. Находим многогранник решений.
2. Определяем угловой коэффициент k и устанавливаем направление поворота прямой целевой функции.
3. Находим точку максимума (минимума) целевой функции или устанавливаем неразрешимость задачи.

Применение дробно-линейного программирования в экономике. Рассмотрим использование дробно-линейного программирования для расчета себестоимости выпускаемых изделий.

Пример 6. Для производства продукции двух видов A и B предприятие использует технологическое оборудование трех типов. Каждое изделие должно пройти обработку на данном типе оборудования. Время обработки каждого изделия и затраты, связанные с производством одного изделия, даны в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Вид изделия	Затраты времени на обработку одного изделия, ч			Затраты на производство одного изделия, тыс. руб.
	оборудование I типа	оборудование II типа	оборудование III типа	
A	2	1	12	2
B	8	1	3	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч, соответственно оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 — количество изделий вида A , которое следует изготовить предприятию, x_2 — количество изделий вида B . Общие затраты на их производство составят $2x_1 + 3x_2$ тыс. руб., а себестоимость одного изделия равна $\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$.

Математическая модель задачи примет вид

$$L = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min;$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 26;$$

$$x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$12x_1 + 3x_2 \leq 39;$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

На рис. 7.11 треугольник ABC — область допустимых решений.

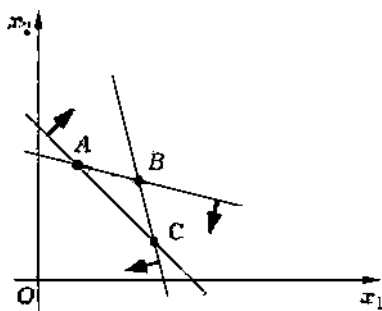


Рис. 7.11

Из равенства $L = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$ находим x_2 : $x_2 = x_1 \frac{L-2}{3-L} = kx_1$, где $k = \frac{L-2}{3-L}$ — угловой коэффициент прямой. Вычислим производную k по L :

$$\frac{dk}{dL} = \frac{(3-L) - (-1)(L-2)}{(3-L)^2} = \frac{1}{(3-L)^2}.$$

Так как производная $\frac{dk}{dL}$ положительная, функция $k = \frac{L-2}{3-L}$ возрастает. Это соответствует вращению прямой против часовой стрелки. Следовательно, в точке C (рис. 7.11) целевая функция будет иметь наименьшее значение (глобальный минимум).

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 = 39; \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

Получим: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Следовательно, экстремум достигается в точке $C(3; 1)$ и равен $L = 9/4$.

Таким образом, себестоимость одного изделия будет минимальной и равной в среднем 2,25 тыс. руб., если предприятие выпускает три изделия вида A и одно изделие вида B .

Сведение математической модели дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования. Задачу дробно-линейного программирования можно свести к задаче линейного программирования и решить симплексным методом.

Положим

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j}, \quad (7.7)$$

где

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j \neq 0, \quad (7.8)$$

и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j$.

Получим задачу линейного программирования

$$L = \sum_{j=1}^n c_j y_j \rightarrow \max (\min) \quad (7.9)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, & i = \overline{1, m}; \\ \sum_{j=1}^n d_j y_j = 1; \\ y_j \geq 0, & j = \overline{1, n}; \quad y_0 > 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Определив оптимальное решение задачи (7.9), (7.10), с учетом соотношения (7.7) получим оптимальное решение исходной задачи (7.3), (7.4).

Приведем алгоритм решения:

1. Сводим задачу (7.3), (7.4) к задаче линейного программирования (7.9), (7.10).
2. Находим решение задачи.
3. Используя соотношение (7.7), находим оптимальное решение и значение целевой функции.

Покажем сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования на конкретном примере.

Пример 7. Дана задача дробно-линейного программирования

$$\begin{aligned} L &= \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6; \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

Решение. Введем обозначения:

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + 2x_2 + 1}, \quad y_1 = x_1 y_0, \quad y_2 = x_2 y_0, \quad y_3 = x_3 y_0, \quad y_4 = x_4 y_0.$$

Тогда $L = 2x_1 y_0 - x_2 y_0$. Преобразуем систему ограничений, умножая обе части всех ограничений на y_0 , и переходя к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 . Тогда задача примет вид

$$\begin{aligned} L &= 2y_1 - y_2 \rightarrow \max; \\ -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 &= 0, \\ -6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 &= 0, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 &= 1, \\ y_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad y_0 > 0. \end{aligned}$$

Получили задачу линейного программирования, решаем ее симплексным методом (табл. 7.2).

Таблица 7.2

c_i	БП	0	2	-1	0	0	b_i
		y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	
	y_3	-2	1	-2	1	0	0
	y_4	-6	2	1	0	1	0
	①	1	1	2	0	0	1
0	y_3	0	③	2	1	0	2
0	y_4	0	8	13	0	1	6
0	y_0	1	1	2	0	0	1
Δ_j		0	-2	1	0	0	0
2	y_1	0	1	2/3	1/3	0	2/3
0	y_4	0	0	13/3	-8/3	1	2/3
0	y_0	1	0	4/3	-1/3	0	1/3
Δ_j		0	0	7/3	2/3	0	4/3

Из табл. 7.2 находим: $\bar{y}_{\text{опт}} = (1/3, 2/3, 0, 0, 2/3)$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 2, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0, \quad x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 0, \quad x_4 = \frac{y_4}{y_0} = 2.$$

Таким образом, $\bar{x}_{\text{опт}} = (2, 0, 0, 2), L_{\max} = 4/3$.

7.1.3. Метод множителей Лагранжа

Дана задача нелинейного программирования

$$\begin{aligned} L &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min); \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Предположим, что функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Ограничения заданы в виде уравнений, поэтому для решения задачи воспользуемся методом отыскания условного экстремума функции нескольких переменных.

Алгоритм решения задач. Для решения задачи составляется функция Лагранжа*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где λ_i — множители Лагранжа.

Затем определяются частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Приравняв к нулю эти частные производные, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Решив систему, получим множество точек, в которых целевая функция L может иметь экстремальные значения. Отметим, что условия рассмотренной системы являются необходимыми, но недостаточными. Поэтому не всякое полученное решение определяет точку экстремума целевой функции. Применение метода бывает оправданным, когда заранее предполагается существование глобального экстремума, совпадающего с единственным локальным максимумом или минимумом целевой функции.

Пример 8. Найти точку условного экстремума функции

$$L = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

при ограничениях

$$x_1 - x_2 = 2, \quad x_2 + 2x_3 = 4.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа, предварительно записав ограничения в виде неявных функций:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2 (x_2 + 2x_3 - 4).$$

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 380.

Приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа по переменным $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = x_2 + 2\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 - x_2 - 2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x_2 + 2x_3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение системы: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, x_1 = -2, x_2 = -4, x_3 = 4, L = -8$.

Определим характер экстремума, изменяя полученные значения переменных. Измененные значения должны удовлетворять заданной системе ограничений. Например, возьмем $x_1 = -1$ (больше значения -2), тогда из системы ограничений $x_2 = -3, x_3 = 7/2, L = -15/2$. Возьмем $x_1 = -3$ (меньше значения -2), тогда $x_2 = -5, x_3 = 9/2, L = -15/2$. Следовательно, $L = -8$ — минимальное значение функции.

Таким образом, точка экстремума $x_1 = -2, x_2 = -4, x_3 = 4$, при этом минимальное значение функции $L = -8$.

Применение метода множителей Лагранжа в экономике. Рассмотрим применение метода множителей Лагранжа на примере решения задачи оптимальной реализации продукции.

Пример 9. Мукомольный комбинат реализует муку двумя способами: в розницу через магазин и оптом через торговых агентов. При продаже x_1 кг муки через магазин расходы на реализацию составляют x_1^2 руб., а при продаже x_2 кг муки посредством торговых агентов — x_2^2 руб.

Определить, сколько килограммов муки следует продавать каждым способом, чтобы затраты на реализацию были минимальными, если в сутки для продажи выделяется 5000 кг муки.

Решение. Составим математическую модель задачи. Найдем минимум суммарных расходов

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 = 5000, \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Для расчета модели используем метод множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5000).$$

Найдем частные производные функции F по x_1 , x_2 и λ , приравняем к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0, \\ 2x_2 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 5000 = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda = -5000$, $x_1 = 2500$ кг, $x_2 = 2500$ кг, $L = 12\,500$ тыс. руб.

Давая x_1 значения больше и меньше 2500, находим L и из определения экстремума функции получаем, что L при $x_1 = x_2 = 2500$ достигает минимума.

Таким образом, для того чтобы затраты комбината были минимальными, ему необходимо продавать в сутки через магазин и торговых агентов по 2500 кг муки, при этом расходы на реализацию составят 12 500 тыс. руб.

7.1.4. Выпуклое программирование

Основные определения и теоремы. Дана задача нелинейного программирования:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max; \quad (7.11)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (7.12)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7.13)$$

где f и g_i — некоторые функции n переменных $x_1, x_2, x_j, \dots, x_n$.

Для решения задачи в такой общей постановке универсальных методов не существует. Однако для отдельных классов задач, в которых имеются дополнительные ограничения, касающиеся свойств функций f и g_i , разработаны методы решения. Например, ряд таких методов используется для решения задач нелинейного программирования вида (7.11)–(7.13) при условии, что f — вогнутая (выпуклая) функция и область допустимых решений, определяемая ограничениями (7.12) и (7.13), выпуклая*.

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданная на выпуклом множестве X , называется *выпуклой*, если для любых двух точек X_1 и X_2 из множества X и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется соотношение

$$f[\lambda X_2 + (1 - \lambda)X_1] \leq \lambda f(X_2) + (1 - \lambda)f(X_1). \quad (7.14)$$

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 358.

Определение 2. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданная на выпуклом множестве X , называется *вогнутой*, если для любых двух точек X_1 и X_2 из множества X и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется соотношение

$$f[\lambda X_2 + (1 - \lambda)X_1] \geq \lambda f(X_2) + (1 - \lambda)f(X_1). \quad (7.15)$$

Определение 3. Говорят, что множество допустимых решений задачи (7.11)–(7.13) *удовлетворяет условию регулярности*, если существует, по крайней мере, одна точка X_* , принадлежащая области допустимых решений, такая, что $g_i(X_*) < b_i$.

Определение 4. Задача (7.11)–(7.13) называется *задачей выпуклого программирования*, если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, является вогнутой (выпуклой), а функции $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — выпуклыми.

Теорема 7.1. Любой локальный максимум (минимум) задачи выпуклого программирования является глобальным максимумом (минимумом). ■

Определение 5. *Функцией Лагранжа* задачи выпуклого программирования (7.11)–(7.13) называется функция

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)], \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_m$ — множители Лагранжа.

Определение 6. Точка $(X_0, Y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ называется *седловой точкой* функции Лагранжа, если

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) \leq L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) \leq \\ \leq L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

для всех $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$) и $y_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$).

Теорема 7.2 (Куна — Таккера). Для задачи выпуклого программирования (7.11)–(7.13), множество допустимых решений которой обладает свойством регулярности, $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ является оптимальным планом тогда и только тогда, когда существует такой вектор $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ ($y_i^0 \geq 0$), что (X_0, Y_0) — седловая точка функции Лагранжа. ■

Если предположить, что целевая функция f и функции g_i непрерывно дифференцируемы, то теорема Куна — Таккера может быть дополнена аналитическими выражениями, определяющими необходимые и достаточные условия того, чтобы точка (X_0, Y_0) была седловой точкой функции Лагранжа, т.е. являлась решением задачи выпуклого программирования. Эти выражения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \leq 0; \quad (7.17)$$

$$x_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (7.18)$$

$$x_j^0 \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (7.20)$$

$$y_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (7.21)$$

$$y_i^0 \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7.22)$$

где $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial L_0}{\partial y_i}$ — значения соответствующих частных производных функции Лагранжа, вычисленных в седловой точке. Всем отмеченным требованиям, позволяющим записать необходимые и достаточные условия для седловой точки (X_0, Y_0) функции Лагранжа в виде выражений (7.17)–(7.22), удовлетворяет сформулированная ниже задача квадратичного программирования.

Определение 7. *Квадратичной формой* относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется числовая функция от этих переменных, имеющая вид

$$F(X) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j.$$

Определение 8. Квадратичная форма $F(X)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $F(X) > 0$ ($F(X) < 0$) для всех значений переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, кроме $X = 0$.

Определение 9. Квадратичная форма $F(X)$ называется *положительно (отрицательно) полуопределенной*, если $F(X) \geq 0$ ($F(X) \leq 0$) для любого набора значений переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и, кроме того, существует такой набор переменных $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, в котором не все значения переменных одновременно равны нулю, что $F(X') = 0$.

Теорема 7.3. Квадратичная форма является выпуклой функцией, если она положительно полуопределенная, и вогнутой функцией, если она отрицательно полуопределенная. ■

Определение 10. Задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j \quad (7.23)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (7.24)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7.25)$$

где $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j$ — отрицательно (положительно) полуопределенная квадратичная форма, называется *задачей квадратичного программирования*.

Для задачи квадратичного программирования функция Лагранжа запишется в виде

$$L = \sum_{j=1}^n d_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j + y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right).$$

Если функция L имеет седловую точку

$$(X_0, Y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0),$$

то в этой точке выполняются условия (7.17)–(7.22). Вводя дополнительные переменные v_j , $j = \overline{1, n}$, и w_i , $i = \overline{1, m}$, обращающие неравенства (7.17) и (7.20) в равенства, перепишем выражения (7.17)–(7.22), записанные для задачи квадратичного программирования, следующим образом:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0; \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} - w_i = 0; \quad (7.27)$$

$$x_j^0 v_j = 0; \quad (7.28)$$

$$y_i^0 w_i = 0; \quad (7.29)$$

$$x_j^0, v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad y_i^0, w_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7.30)$$

Алгоритм решения задачи квадратичного программирования. Для решения задачи квадратичного программирования (7.23)–(7.25) нужно найти неотрицательное решение систем линейных уравнений (7.26) и (7.27), удовлетворяющее условиям (7.28) и (7.29). Это можно сделать, например, с помощью метода искусственного базиса, примененного для нахождения максимального значения функции $F = -\sum My_i$, при условиях (7.26), (7.27), (7.30) с учетом (7.28) и (7.29), где y_i — искусственные переменные, введенные в уравнения (7.26) и (7.27), а M — большое число.

Используя метод искусственного базиса и дополнительно учитывая условия (7.28) и (7.29), после конечного числа шагов решения либо установим неразрешимость исходной задачи, либо получим оптимальное решение.

Процесс нахождения решения задачи квадратичного программирования включает в себя следующие этапы.

1. Составляют функцию Лагранжа.
2. Записывают в виде выражений (7.26)–(7.30) необходимые и достаточные условия существования седловой точки для функции Лагранжа.
3. Используя метод искусственного базиса, либо устанавливают отсутствие седловой точки для функции Лагранжа, либо находят ее координаты.
4. Записывают оптимальное решение исходной задачи и находят значение целевой функции.

Пример 10. Найти максимальное значение функции

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 \leq 8;$$

$$2x_2 - x_2 \leq 12;$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. Функция f вогнутая, так как представляет собой сумму линейной функции $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ (которую можно рассматривать как вогнутую) и отрицательно определенной квадратичной формы $f_2 = -x_1^2 - x_2^2$, которая, следовательно, также вогнутая. Система ограничений задачи включает в себя только линейные неравенства. Поэтому можно воспользоваться теоремой Куна — Таккера.

Составим функцию Лагранжа:

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + y_1(8 - x_1 - 2x_2) + y_2(12 - 2x_1 + x_2)$$

и запишем, используя (7.26)–(7.30), необходимые и достаточные условия существования седловой точки построенной функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2) = 0, \\ x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2) = 0, \\ y_1 \frac{\partial L}{\partial y_1} = y_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ y_2 \frac{\partial L}{\partial y_2} = y_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0, \\ x_{1,2} \geq 0, \quad y_{1,2} \geq 0. \end{array} \right. \quad (7.31)$$

Первые четыре соотношения системы (неравенства) перепишем следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + y_1 + 2y_2 \geq 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{array} \right. \quad (7.32)$$

Введем теперь дополнительные неотрицательные переменные v_1, v_2, w_1 и w_2 , обращая неравенства (7.32) в равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12. \end{array} \right. \quad (7.33)$$

С учетом дополнительных переменных вторую четверку соотношений в системе (7.31) можно записать в виде:

$$v_1 x_1 = 0, \quad v_2 x_2 = 0, \quad w_1 y_1 = 0, \quad w_2 y_2 = 0. \quad (7.34)$$

Для нахождения базисного решения системы линейных уравнений (7.33) с учетом выполнения равенств (7.34) воспользуемся методом искусственного базиса. В первое и второе уравнения системы (7.34) добавим дополнительные неотрицательные переменные z_1 и z_2 соответственно и рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \bar{F} = -Mz_1 - Mz_2 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 + z_1 = 2; \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 + z_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \\ x_{1,2}, y_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2}, z_{1,2} \geq 0. \end{cases} \quad (7.35)$$

Чтобы решить эту задачу, сперва находим ее допустимое базисное решение (табл. 7.3).

Таблица 7.3

i	c_i	БП	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0	0	f
			x_1	x_2	y_1	y_2	v_1	v_2	z_1	z_2	w_1	w_2	
1	$-M$	z_1	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0	2
2	$-M$	z_2	0	④	2	-1	0	-1	0	1	0	0	4
3	0	w_1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	8
4	0	w_2	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	12
Δ_j			-2	-4	-3	-1	1	1	-1	-1	0	0	-6
1	$-M$	z_1	②	0	1	2	-1	0	1	0	0	0	2
2	0	x_2	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0	1
3	0	w_1	1	0	-1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1	0	6
4	0	w_2	2	0	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1	13
Δ_j			-2	0	-1	-2	1	0	-1	0	0	0	-2
1	0	x_1	1	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0	1
2	0	x_2	0	1	1	-1/2	0	-1/2	0	1/2	0	0	1
3	0	w_1	0	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1	0	5
4	0	w_2	0	0	-1/2	-3/4	1	-1/4	-1	1/4	0	1	11
Δ_j			0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0

Из табл. 7.3 получаем:

$$x_1^0 = 1; \quad x_2^0 = 1; \quad w_1 = 5; \quad w_2 = 11; \quad y_1^0 = y_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Так как $x_1^0 v_1 = 0$, $x_2^0 v_2 = 0$, $y_1^0 w_1 = 0$, $y_2^0 w_2 = 0$, заключаем, что точка $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0) = (1, 1, 0, 0)$ является седловой для функции Лагранжа исходной задачи. Следовательно, $\bar{x}_{\text{опт}} = (1, 1)$ — оптимальный план исходной задачи и $f_{\text{max}} = 3$.

7.2. Динамическое программирование

7.2.1. Основные понятия

Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс считается управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под *управлением* понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и иным подобным вопросам, является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые на отдельных этапах решения способствовали получению максимального возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании универсального метода не существует. Один из основных методов динамического программирования — метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование такого принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, является не только локально лучшим, но и лучшим с точки зрения процесса в целом.

В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов производственной деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить более простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

7.2.2. Применение метода функциональных уравнений в определении оптимальных сроков замены оборудования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые. Старение оборудования означает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты на выпуск продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость. Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать и заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат. Причем его можно заменить новым оборудованием того же вида или иным, более совершенным.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности могут служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует максимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения:

$r(t)$ — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P — покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Пусть $f_N(t)$ — максимальная прибыль, получаемая от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $n = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $n = N$ — к началу процесса (рис. 7.12).



Рис. 7.12

На каждом этапе N -стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) & \text{— сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) - f_{N-1}(1) & \text{— замена;} \end{cases} \quad (7.36)$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) & \text{— сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) & \text{— замена.} \end{cases} \quad (7.37)$$

Уравнение (7.36) описывает N -стадийный процесс, а уравнение (7.37) — одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет прибыль, получаемую при сохранении оборудования; нижняя — прибыль, получаемую при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении (7.36) функция $r(t) - u(t)$ показывает разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N -й стадии процесса.

Функция $f_{N-1}(t+1)$ характеризует суммарную прибыль от $N-1$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $t+1$ лет.

Нижняя строка (7.36) характеризуется следующим образом: функция $s(t) - P$ представляет собой чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

Функция $r(0) - u(0)$ выражает прибыль, получаемую от нового оборудования возраста нуль лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция $f_{N-1}(1)$ в (7.36) представляет собой доход от оставшихся $N-1$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению (7.37) для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t+1)$, так как номер стадии принимает значения $1, 2, \dots, N$. Равенство $f_0(t) = 0$ следует из определения функции $f_N(t)$.

Уравнения (7.36) и (7.37) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t+1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до $t+1$ лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до $N-1$.

Расчет начинают с использования уравнения (7.36). Уравнения (7.36) и (7.37) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования с тем, чтобы выбрать тот из них, который предполагает большую прибыль. Эти соотношения

дают возможность не только определить линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и рассчитать прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример 11. Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования на 5 лет при следующих исходных данных: $P = 10$, $s(t) = 0$. Значения функции $f(t) = r(t) - u(t)$ заданы в табл. 7.4.

Таблица 7.4

N		5	4	3	2	1
t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$	10	9	8	7	6	5

Решение. Уравнения (7.36) и (7.37) запишем в виде

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \max \{f(t) + f_{N-1}(t+1), -P + f(0) + f_{N-1}(1)\}; \\ f_1(t) &= \max \{f(t), -P + f(0)\}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Для стадии с номером $n = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \max \{f(0), -P + f(0)\} = \max \{10, -10 + 10\} = 10 \text{ (сохранение)}; \\ f_1(1) &= \max \{f(1), -P + f(0)\} = \max \{9, -10 + 10\} = 9 \text{ (сохранение)} \end{aligned}$$

и т.д. Аналогично найдем: $f_1(2) = 8$ — сохранение, $f_1(3) = 7$ — сохранение, $f_1(4) = 6$ — сохранение, $f_1(5) = 5$ — сохранение.

Для $n = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} f_2(0) &= \max \{f(0) + f_1(1), -P + f(0) + f_1(1)\} = \\ &= \max \{10 + 9, -10 + 10 + 9\} = 19 \text{ (сохранение)}; \\ f_2(1) &= \max \{f(1) + f_1(2), -P + f(0) + f_1(1)\} = \\ &= \max \{9 + 8, -10 + 10 + 9\} = 17 \text{ (сохранение)}. \end{aligned}$$

Аналогично найдем: $f_2(2) = 15$ — сохранение, $f_2(3) = 13$ — сохранение, $f_2(4) = 11$ — сохранение, $f_2(5) = 9$ — сохранение.

Для $n = 3$ имеем:

$$\begin{aligned} f_3(0) &= \max \{f(0) + f_2(1), -P + f(0) + f_2(1)\} = \\ &= \max \{10 + 17, -10 + 10 + 17\} = 17 \text{ (сохранение)}; \\ f_3(1) &= \max \{f(1) + f_2(2), -P + f(0) + f_2(1)\} = \\ &= \max \{9 + 15, -10 + 10 + 17\} = 24 \text{ (сохранение)}. \end{aligned}$$

Аналогично найдем: $f_3(2) = 21$ — сохранение, $f_3(3) = 18$ — сохранение, $f_3(4) = 15$ — замена, $f_3(5) = 17$ — замена.

Для $n = 4$ имеем:

$$\begin{aligned} f_4(0) &= \max \{f(0) + f_3(1), -P + f(0) + f_3(1)\} = \\ &= \max \{10 + 24, -10 + 10 + 24\} = 34 \text{ (сохранение);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(1) &= \max \{f(1) + f_3(2), -P + f(0) + f_3(1)\} = \\ &= \max \{9 + 21, -10 + 10 + 24\} = 30 \text{ (сохранение).} \end{aligned}$$

Аналогично найдем: $f_4(2) = 26$ — сохранение, $f_4(3) = 24$ — сохранение, $f_4(4) = 23$ — замена, $f_4(5) = 24$ — замена.

Для $n = 5$ имеем:

$$\begin{aligned} f_5(0) &= \max \{f(0) + f_4(1), -P + f(0) + f_4(1)\} = \\ &= \max \{10 + 30, -10 + 10 + 30\} = 40 \text{ (сохранение);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5(1) &= \max \{f(1) + f_4(2), -P + f(0) + f_3(1)\} = \\ &= \max \{9 + 26, -10 + 10 + 30\} = 35 \text{ (сохранение).} \end{aligned}$$

Аналогично найдем: $f_5(2) = 32$ — сохранение, $f_5(3) = 31$ — сохранение, $f_5(4) = 30$ — замена, $f_5(5) = 30$ — замена.

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $f_{n-1}(1) > f_n(t-1)$, т.е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчетов помещаем в табл. 7.5, момент замены отмечаем звездочкой (*), после чего дальнейшие вычисления по строке прекращаем.

Таблица 7.5

$f_N(t)$	0	1	2	3	4	5
	N	5	4	3	2	1
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9
$f_3(t)$	27	24	21	18	17*	
$f_4(t)$	34	30	26	23	24*	
$f_5(t)$	40	35	32	31	30*	

Можно не решать каждый раз уравнения (7.38), а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $f_3(t)$:

$$f_3(0) = f_1(0) + f_2(1) = 10 + 17 = 27 > f_2(1) = 17;$$

$$f_3(1) = f_1(1) + f_2(2) = 9 + 15 = 24 > f_2(1);$$

$$f_3(2) = f_1(2) + f_2(3) = 8 + 13 = 21 > f_2(1);$$

$$f_3(3) = f_1(3) + f_2(4) = 7 + 11 = 18 > f_2(1);$$

$$f_3(4) = f_1(4) + f_2(5) = 6 + 9 = 15 < f_2(1).$$

Дальнейшие расчеты для $f_3(t)$ прекращаем, так как $f_3(4) = 15 < f_2(1) = 17$.

Таким образом, для получения максимальной прибыли от использования оборудования оптимальный срок его замены составляет 4 года.

7.2.3. Экономические задачи, решаемые методом динамического программирования

Оптимальное распределение ресурсов. Пусть имеется некоторое количество ресурсов x , которое необходимо распределить между n различными предприятиями (объектами, работами и т.д.) так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введем обозначения:

$x_i, i = \overline{1, n}$, — количество ресурсов, распределенных i -му предприятию;

$g_i(x_i)$ — функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурсов x_i , полученных i -м предприятием;

$f_k(x)$ — наибольший доход, который можно получить от первых k различных предприятий при использовании ресурсов x .

Такую задачу можно записать в математической форме:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \rightarrow \max; \\ \sum_{i=1}^n x_i &= x; \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$.

Обозначим через x_k количество ресурсов, используемых k -м способом ($0 \leq x_k \leq x$). Тогда для $k-1$ способов остается величина ресурсов, равная $x - x_k$. Наибольший доход, который получается при использовании ресурсов $x - x_k$ от первых $k-1$ способов, составит $f_{k-1}(x - x_k)$.

Для максимизации суммарного дохода от k -го и первых $k-1$ способов необходимо выбрать x_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g_1(x); \\ f_k(x) &= \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим конкретную задачу по распределению капиталовложений между предприятиями.

Пример 12. Совет директоров рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей организации для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих организации.

Для расширения предприятий совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн руб. с дискретностью 20 млн руб. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в табл. 7.6.

Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причем в одно предприятие можно осуществить инвестиции только единожды.

Таблица 7.6

Выделяемые средства, млн руб.	Прирост выпуска продукции, млн руб.			
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3	предприятие 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Решение. Разобьем решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, в которые предполагается осуществить инвестиции.

Рекуррентные соотношения будут иметь вид:

для предприятия 1

$$f_1(x) = g_1(x_1);$$

для всех остальных предприятий

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Решение будем проводить согласно рекуррентным соотношениям.

Этап 1. Инвестиции производим только в первое предприятие:

$$\begin{aligned} f_1(20) &= 8, & f_1(40) &= 16, & f_1(60) &= 25, \\ f_1(80) &= 36, & f_1(100) &= 44, & f_1(120) &= 62. \end{aligned}$$

Этап 2. Капиталовложения выделяем первому и второму предприятиям. Рекуррентное соотношение для этапа 2 имеет вид

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

С помощью этого соотношения находим:

при $x = 20$:

$$f_2(20) = \max\{8 + 0, 0 + 10\} = \max\{8, 10\} = 10;$$

при $x = 40$:

$$f_2(40) = \max\{16, 8 + 10, 20\} = \max\{16, 18, 20\} = 20;$$

при $x = 60$:

$$f_2(60) = \max\{25, 16 + 10, 8 + 20, 28\} = \max\{25, 26, 28, 28\} = 28;$$

при $x = 80$:

$$\begin{aligned} f_2(80) &= \max\{36, 25 + 10, 16 + 20, 8 + 28, 40\} = \\ &= \max\{36, 35, 36, 36, 40\} = 40; \end{aligned}$$

при $x = 100$:

$$\begin{aligned} f_2(100) &= \max\{44, 36 + 10, 25 + 20, 16 + 28, 8 + 40, 48\} = \\ &= \max\{44, 46, 45, 44, 48, 48\} = 48; \end{aligned}$$

при $x = 120$:

$$\begin{aligned} f_2(120) &= \max\{62, 44 + 10, 36 + 20, 25 + 28, 16 + 40, 8 + 48, 62\} = \\ &= \max\{62, 54, 56, 53, 56, 56, 62\} = 62. \end{aligned}$$

Э т а п 3. Финансируем этап 2 и третье предприятие. По формуле

$$f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}$$

находим:

при $x = 20$:

$$f_3(20) = \max\{10, 12\} = 12;$$

при $x = 40$:

$$f_3(40) = \max\{20, 10 + 12, 21\} = \max\{20, 22, 21\} = 22;$$

при $x = 60$:

$$f_3(60) = \max\{28, 20 + 12, 10 + 21, 27\} = \max\{28, 32, 31, 27\} = 32;$$

при $x = 80$:

$$\begin{aligned} f_3(80) &= \max\{40, 28 + 12, 20 + 21, 10 + 27, 38\} = \\ &= \max\{40, 40, 41, 37, 38\} = 41; \end{aligned}$$

при $x = 100$:

$$\begin{aligned} f_3(100) &= \max\{48, 40 + 12, 28 + 21, 20 + 27, 10 + 38, 50\} = \\ &= \max\{48, 52, 49, 47, 48, 50\} = 52; \end{aligned}$$

при $x = 120$:

$$\begin{aligned} f_3(120) &= \max\{62, 48 + 12, 40 + 21, 28 + 27, 20 + 38, 10 + 50, 63\} = \\ &= \max\{62, 60, 61, 55, 58, 60, 63\} = 63. \end{aligned}$$

Этап 4. Инвестиции в объеме 120 млн руб. распределяем между этапом 3 и четвертым предприятием.

При $x = 120$:

$$\begin{aligned} f_4(120) &= \max\{63, 52 + 11, 41 + 23, 32 + 30, 22 + 37, 12 + 51, 63\} = \\ &= \max\{63, 63, 64, 62, 59, 63, 63\} = 64. \end{aligned}$$

Получены управления от 1-го до 4-го этапа. Вернемся назад от 4-го к 1-му этапу и проанализируем полученные варианты роста. Максимальный прирост выпуска продукции 64 млн руб. получен на этапе 4 как $41 + 23$, т.е. 23 млн руб. соответствует выделению 40 млн руб. четвертому предприятию (см. табл. 7.6). Согласно третьему этапу 41 млн руб. получен как $20 + 21$, т.е. 21 млн руб. соответствует выделению 40 млн руб. третьему предприятию. Согласно второму этапу 20 млн руб. получено при выделении 40 млн руб. второму предприятию.

Итак, капиталовложения в объеме 120 млн руб. целесообразно распределить второму, третьему и четвертому предприятиям по 40 млн руб. каждому. При этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 млн руб.

Минимизация затрат на строительство и эксплуатацию предприятий.

Задача по оптимальному размещению производственных предприятий может быть сведена к задаче распределения ресурсов по критерию минимизации с учетом условий целочисленности, накладываемых на переменные.

Пусть задана потребность в пользующемся спросом продукте на определенной территории. Известны пункты, в которых можно построить предприятия, выпускающие данный продукт. Подсчитаны затраты на строительство и дальнейшую эксплуатацию этих предприятий.

Необходимо так разместить предприятия, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

Введем обозначения:

x — количество распределяемых ресурсов, которые можно использовать n различными способами;

$x_i, i = \overline{1, n}$, — количество ресурсов, используемых i -м способом;

$g_i(x_i)$ — функция расходов, равная, например, величине затрат на производство при использовании ресурсов x_i i -м способом;

$\varphi_k(x)$ — наименьшие затраты, которые нужно произвести при использовании ресурсов x первыми k способами.

Задачу минимизации общей величины затрат при освоении ресурса x всеми способами можно сформулировать так:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \min \sum_{i=1}^n g_i(x_i); \\ \sum_{i=1}^n x_i &= x; \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

Экономический смысл переменных x_i состоит в нахождении количества предприятий, которые необходимо построить в i -м пункте. Для удобства расчетов будем считать, что планируется строительство предприятий одинаковой мощности.

Рассмотрим конкретную задачу по размещению предприятий.

Пример 13. В трех районах города предприниматель планирует построить пять предприятий одинаковой мощности по выпуску хлебобулочных изделий, пользующих спросом. Необходимо разместить число предприятий x таким образом, чтобы обеспечить суммарные минимальные затраты на их строительство и эксплуатацию. Значения функции затрат $g_i(x_i)$ приведены в табл. 7.7.

Таблица 7.7

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	11	18	35	51	76
$g_2(x)$	10	19	34	53	75
$g_3(x)$	9	20	36	54	74

В табл. 7.7 $g_i(x_i)$ — функция расходов (млн руб.), характеризующая величину затрат на строительство и эксплуатацию в зависимости от количества размещаемых предприятий в i -м районе; $\varphi_k(x)$ — наименьшая величина затрат (млн руб.), необходимых на строительство и эксплуатацию предприятий в первых k районах.

Решение. Решение задачи проводим с использованием рекуррентных соотношений в три этапа. Для первого района

$$\varphi_1(x) = \min g_i(x_i) = g_1(x).$$

Для остальных районов

$$\varphi_k(x) = \min \{g_k(x_k) + \varphi_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Э т а п 1. Если все предприятия построить только в первом районе, то

$$\varphi_1(1) = g_1(1) = 11, \quad \varphi_1(2) = g_1(2) = 18, \quad \varphi_1(3) = g_1(3) = 35,$$

$$\varphi_1(4) = g_1(4) = 51, \quad \varphi_1(5) = g_1(5) = 76.$$

Минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 76 млн ден. ед.

Э т а п 2. Определим оптимальную стратегию при размещении предприятий только в первых двух районах по формуле

$$\varphi_2(x) = \min \{g_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}.$$

Найдем $\varphi_2(1)$:

$$g_2(1) + \varphi_1(0) = 10 + 0 = 10,$$

$$g_2(0) + \varphi_1(1) = 0 + 11 = 11,$$

$$\varphi_2(1) = \min \{10, 11\} = 10.$$

Вычислим $\varphi_2(2)$:

$$g_2(2) + \varphi_1(0) = 19 + 0 = 19,$$

$$g_2(1) + \varphi_1(1) = 10 + 11 = 21,$$

$$g_2(0) + \varphi_1(2) = 0 + 18 = 18,$$

$$\varphi_2(2) = \min \{19, 21, 18\} = 18.$$

Найдем $\varphi_2(3)$:

$$g_2(3) + \varphi_1(0) = 34 + 0 = 34,$$

$$g_2(2) + \varphi_1(1) = 19 + 11 = 30,$$

$$g_2(1) + \varphi_1(2) = 10 + 18 = 28,$$

$$g_2(0) + \varphi_1(3) = 0 + 35 = 35,$$

$$\varphi_2(3) = \min \{34, 30, 28, 35\} = 28.$$

Определим $\varphi_2(4)$:

$$\begin{aligned}g_2(4) + \varphi_1(0) &= 53 + 0 = 53, \\g_2(3) + \varphi_1(1) &= 34 + 11 = 45, \\g_2(2) + \varphi_1(2) &= 19 + 18 = 37, \\g_2(1) + \varphi_1(3) &= 10 + 35 = 45, \\g_2(0) + \varphi_1(4) &= 0 + 51 = 51, \\ \varphi_2(4) &= \min \{53, 45, 37, 45, 51\} = 37.\end{aligned}$$

Вычислим $\varphi_2(5)$:

$$\begin{aligned}g_2(5) + \varphi_1(0) &= 75 + 0 = 75, \\g_2(4) + \varphi_1(1) &= 53 + 11 = 64, \\g_2(3) + \varphi_1(2) &= 34 + 18 = 52, \\g_2(2) + \varphi_1(3) &= 19 + 35 = 54, \\g_2(1) + \varphi_1(4) &= 10 + 51 = 61, \\g_2(0) + \varphi_1(5) &= 0 + 76 = 76, \\ \varphi_2(5) &= \min \{75, 64, 52, 54, 61, 76\} = 52.\end{aligned}$$

Минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 52 млн руб.

Э т а п 3. Определим оптимальную стратегию при размещении пяти предприятий в трех районах по формуле

$$\varphi_3(x) = \min \{g_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\}.$$

Найдем $\varphi_3(5)$:

$$\begin{aligned}g_3(5) + \varphi_2(0) &= 74 + 0 = 74, \\g_3(4) + \varphi_2(1) &= 54 + 10 = 64, \\g_3(3) + \varphi_2(2) &= 36 + 18 = 54, \\g_3(2) + \varphi_2(3) &= 20 + 28 = 48, \\g_3(1) + \varphi_2(4) &= 9 + 37 = 46, \\g_3(0) + \varphi_2(5) &= 0 + 52 = 52, \\ \varphi_3(5) &= \min \{74, 64, 54, 48, 46, 52\} = 46.\end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 46 млн руб.

Определены затраты на строительство предприятий от 1-го до 3-го этапа. Вернемся назад от 3-го к 1-му этапу. Минимальные затраты в 46 млн руб. на

3-м этапе получены как $9 + 37$, т.е. 9 млн руб. соответствуют строительству одного предприятия в 3-м районе (см. табл. 7.7). Согласно второму этапу 37 млн руб. соответствуют строительству двух предприятий во втором районе. Согласно первому этапу 18 млн руб. соответствуют строительству двух предприятий в первом районе.

Таким образом, оптимальная стратегия состоит в строительстве одного предприятия в третьем районе, по два предприятия во втором и первом районах, при этом минимальная стоимость строительства и эксплуатации составит 46 млн руб.

Нахождение рациональных затрат при строительстве трубопроводов и транспортных артерий.

Пример 14. Требуется проложить путь (трубопровод, шоссе) между двумя пунктами A и B таким образом, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальными.

Решение. Разделим расстояние между пунктами A и B на шаги (отрезки) и будем считать из условий местности, что на каждом шаге возможно движение либо строго на восток (по оси X), либо строго на север (по оси Y). Тогда путь от A в B представляет ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей. Затраты (млн руб) на сооружение каждого из отрезков трассы известны (рис. 7.13).

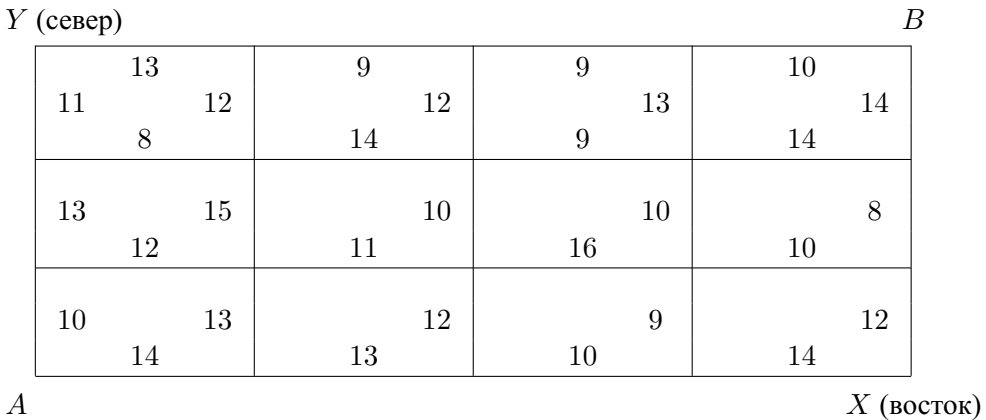


Рис. 7.13

Разделим расстояние от A до B в восточном направлении на 4 части, в северном — на 3 части. Путь можно рассматривать как управляемую систему, перемещающуюся под влиянием управления из начального состояния A в конечное B . Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя целочисленными координатами x и y . Для каждого из

состояний системы (узловой точки) найдем условное оптимальное управление. Оно выбирается так, чтобы стоимость всех оставшихся шагов до конца процесса была минимальна. Процедуру условной оптимизации проводим в обратном направлении, т.е. от точки B к точке A .

Найдем условную оптимизацию последнего шага (рис. 7.14). В точку B можно попасть из B_1 или B_2 . В узлах запишем стоимость пути. Стрелкой покажем минимальный путь.

Рассмотрим предпоследний шаг (рис. 7.15). Для точки B_3 условное управление по оси X , а для точки B_5 по оси Y . Управление для точки B_4 выберем как $\min \{13 + 10, 14 + 14\} = \min \{23, 28\} = 23$, т.е. по оси Y .

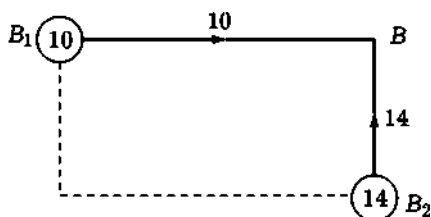


Рис. 7.14

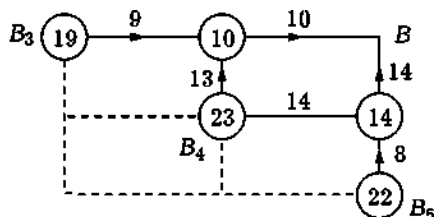


Рис. 7.15

Условную оптимизацию проводим для всех остальных узловых точек. Результаты представлены на рис. 7.16. В итоге получаем $\bar{x}_{\text{опт}} = (\text{с}; \text{с}; \text{в}; \text{с}; \text{в}; \text{в})$, где с — север, в — восток.

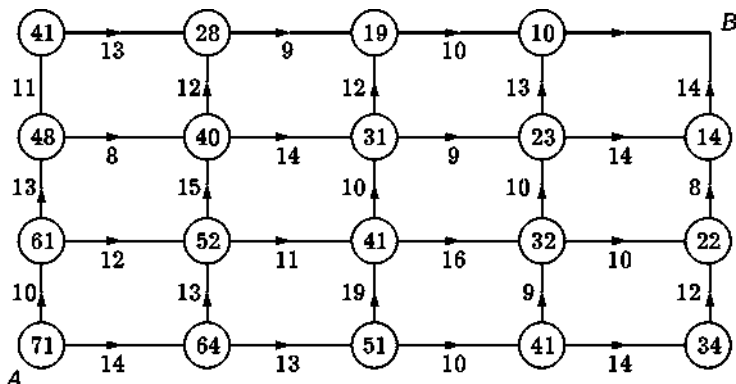


Рис. 7.16

Минимальные затраты составляют

$$10 + 13 + 8 + 12 + 9 + 9 + 10 = 71 \text{ (млн руб.)}.$$

Если решать задачу исходя из оптимальности на каждом этапе, то решение будет

$$\bar{x}_1 = (\text{с}, \text{в}, \text{в}, \text{с}, \text{в}, \text{с}, \text{в}).$$

Затраты составят: $10 + 12 + 11 + 10 + 9 + 13 + 10 = 75 > 71$ (млн руб.).

Следовательно, прокладывать путь целесообразно по схеме: с, с, в, с, в, в, при этом затраты будут минимальные и составят 71 млн руб.

Упражнения

Используя графический метод, решить следующие задачи нелинейного программирования.

$$7.1. \begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max (\min); \\ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 36; \\ x_1 + x_2 \geq 2; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.7. \begin{cases} 2x_1x_2 \rightarrow \max (\min); \\ x_1 + x_2 \leq 12; \\ x_1 + x_2 \leq 9; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 \rightarrow \max (\min); \\ x_1x_2 \geq 2; \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.8. \begin{cases} x_1x_2 \rightarrow \max (\min); \\ x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.3. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max (\min); \\ (x_1 - 2)(x_2 + 1) \leq 16; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.9. \begin{cases} (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max (\min); \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 36; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.4. \begin{cases} (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max (\min); \\ x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ 3x_1 + x_2 \leq 15; \\ x_1 + x_2 \geq 1; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.10. \begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \max (\min); \\ (x_1 - 1)(x_2 + 1) \leq 4; \\ x_2 \leq 3; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.5. \begin{cases} (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \max (\min); \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7; \\ 10x_1 - x_2 \leq 8; \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.11. \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max (\min); \\ x_1x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \geq 5; \\ x_1 \leq 7; \\ x_2 \leq 6; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$7.6. \begin{cases} (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max (\min); \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6; \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

7.12. Найти максимум и минимум дробно-линейной функции $L = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ при ограничениях

$$x_1 + x_2 \geq 5; \quad -x_1 + 3x_2 \leq 7; \quad 3x_1 - x_2 \leq 11; \quad x_{1,2} \geq 0.$$

7.13. Найти максимум дробно-линейной функции $L = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2}$ при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 11; \quad x_1 - x_2 + x_4 = 8; \quad -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Используя метод множителей Лагранжа, найти точку условного экстремума функции L .

$$\mathbf{7.14.} \begin{cases} L = 2x_1x_3 - x_2x_3; \\ x_2 + 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{7.16.} \begin{cases} L = x_1x_2 + x_2x_3; \\ x_1 - x_2 = 2; \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{7.15.} \begin{cases} L = x_1x_2 + x_2x_3; \\ x_1 + x_2 = 2; \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{7.17.} \begin{cases} L = 2x_1 - x_2 + x_3; \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

7.18. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты составляют $4x_1 + x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом $8x_2 + x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

7.19. Организация реализует автомобили двумя способами: через розничную и оптовую торговлю. При реализации x_1 автомобилей в розницу расходы на реализацию равны $4x_1 + x_1^2$ руб., а при продаже x_2 автомобилей оптом расходы составляют x_2^2 руб. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 шт.

Решите следующие задачи выпуклого программирования.

$$\mathbf{7.20.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ 3x_1 + x_2 \leq 15; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{7.22.} \begin{cases} -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ -x_1 + x_2 \geq -8; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{7.21.} \begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ x_2 \leq 5; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{7.23.} \begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max; \\ x_1 + x_3 \leq 18; \\ x_2 \leq 12; \\ x_1 + 2x_3 \leq 14; \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

7.24. На предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его работы, а также затраты на содержание и ремонт при разном времени использования приведены в табл. 7.8. Известно, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного с установленным, составляют 40 млн руб., а заменяемое оборудование списывается. Составить такой план замены оборудования в течение пяти лет, при котором общий доход за данный период времени максимален.

Таблица 7.8

Показатель	Время, в течение которого используется оборудование					
	0	1 год	2 года	3 года	4 года	5 лет
Годовой выпуск продукции, млн руб.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты на содержание и ремонт оборудования, млн руб.	20	25	30	35	45	55

7.25. К началу анализируемого периода на предприятии установлено новое оборудование. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных:

- покупная цена оборудования (P) составляет 12 млн руб.;
- остаточная стоимость оборудования $S(t) = 0$;
- максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии $f_N(t) = r(t) - u(t)$, где $r(t)$ — стоимость продукции, выпускаемой за год на единице оборудования возраста t лет; $u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;
- срок, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования $N = 8$ лет.

Зависимость $f_N(t)$ от N задана в табл. 7.9.

Таблица 7.9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	12	11	10	8	6	4	2	0	0

7.26. Торговая организация располагает пятью автолавками, которые могут быть направлены в воскресный день в три населенных пункта. Считается, что товарооборот организации зависит лишь от количества и ассортимента направляемых товаров и определяется числом посланных в тот или иной населенный пункт автолавок. Средние значения товарооборота (тыс. руб.) в каждом из населенных пунктов заданы в табл. 7.10. Найти оптимальную стратегию организации в распределении автолавок по населенным пунктам, максимизирующую общий товарооборот.

Таблица 7.10

Количество автолавок	Товарооборот в населенных пунктах, тыс. руб.		
	1	2	3
1	15	12	18
2	24	20	23
3	30	31	29
4	37	38	36
5	41	42	39

7.27. В табл. 7.11 указан возможный прирост выпуска продукции четырьмя плодоовощными консервными заводами области (млн руб.) при осуществлении инвестиций на их

модернизацию с дискретностью 50 млн руб., причем на один завод можно осуществить только одну инвестицию. Составить план распределения инвестиций между заводами, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Т а б л и ц а 7.11
млн руб.

Инвестиции	Прирост выпуска продукции			
	завод 1	завод 2	завод 3	завод 4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

7.28. Организация считает необходимым построить в трех областях пять предприятий по переработке сельскохозяйственной продукции одинаковой мощности. Требуется разместить предприятия таким образом, чтобы обеспечить суммарные минимальные затраты на их строительство и эксплуатацию. Значения функции расходов $g_i(x_j)$, характеризующей величину затрат на строительство и эксплуатацию в зависимости от количества размещаемых предприятий в i -й области, приведены в табл. 7.12.

Т а б л и ц а 7.12
млн руб.

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	8	14	22	29	34
$g_2(x)$	10	17	18	27	31
$g_3(x)$	11	16	15	26	31

7.29. Для газификации поселка необходимо проложить трубопровод между двумя пунктами A и B так, чтобы суммарные затраты на его изготовление были минимальны. Исходные данные по затратам (млн руб.) для проведения расчетов показаны на рис. 7.17.

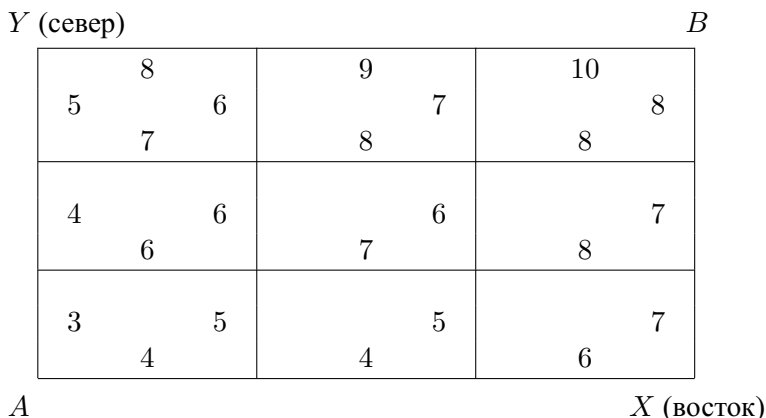


Рис. 7.17

Раздел 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Глава 8. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

Решение современных экономических проблем и анализ экономической ситуации в микро- и макроэкономике невозможны без использования математических моделей. Основным принцип экономической деятельности — максимум эффективности при минимуме затрат ресурсов — предполагает широкое применение математического моделирования в обработке баз данных, оперативной оценке ситуации, прогнозировании деятельности организации.

Математическую модель можно определить как внутренне непротиворечивую замкнутую систему математических соотношений (объект конечной сложности), предназначенную для воспроизведения некоторого качества (или группы качеств) изучаемого реального явления или процесса. Математические модели представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации. Они развивают наши представления о закономерностях экономических процессов и способствуют формированию мышления и анализа на новом, более высоком уровне.

В последнее время для обозначения специфики класса математических моделей, применяемых в экономике, используют термин «экономико-математическое моделирование», и это не случайно, поскольку в выводах экономической теории давно уже используют аппарат различных областей математики. В своей функциональной области математические модели опираются на обширный аппарат математических методов в экономике (см. раздел 2). В настоящее время разработаны математические методы и приемы для решения чисто экономических проблем. Яркими примерами тому являются класс продуктивных матриц в линейной алгебре и методы математического программирования, имеющие сугубо экономический аспект оптимального планирования распределения ограниченных ресурсов.

8.1. Аппарат производственных функций

Понятие производственной функции имеет основополагающее значение в экономической теории. Производственная функция определяет связь между затратами факторов производства и выпуском продукции в производственной

системе. Производственная функция описывает наиболее эффективные производственные процессы.

Производственные функции могут быть определены для производственных систем различных масштабов — от отдельного предприятия до уровня мировой экономики. С помощью производственных функций можно оценить эффективность функционирования производственной системы и использования в ней ресурсов, спрогнозировать влияние вносимых изменений и инноваций в производство, выбрать оптимальную стратегию эволюции производственных систем.

8.1.1. Производственные функции

Основные понятия. Под *производственной функцией* понимается такая функция, независимая переменная которой обозначает объем используемого ресурса (фактора), а зависимая переменная — объем выпускаемой продукции. В формуле

$$y = f(x) \quad (8.1)$$

используемый ресурс $x \geq 0$, объем выпускаемой продукции $y \geq 0$. Производственная функция вида (8.1) называется *однофакторной* или *одноресурсной*. Знак функции f рассматривается как характеристика *производственной системы*, преобразующей ресурс x в выпуск y .

Многофакторная производственная функция характеризуется функцией нескольких переменных

$$y = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.2)$$

где независимые неотрицательные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначают объемы n используемых ресурсов, а значение функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — объем выпуска. Областью определения многофакторной производственной функции по экономическому смыслу является множество n -мерных векторов с неотрицательными компонентами, а зависимая переменная $y \geq 0$ — скалярная величина.

Производственные функции (ПФ) реализуют схему «затраты — выпуск» и используются в различных областях экономики. На уровне микроэкономики в качестве производственной системы может выступать отдельная организация, отрасль, межотраслевой комплекс, а с помощью ПФ описывают взаимосвязь между величиной ресурса, расходуемого за некоторый период времени, и итоговым выпуском продукции за этот же временной промежуток (например, за год). В таком случае ПФ строятся и используются в основном для решения задач анализа и планирования, реже — для прогноза. На макроэкономическом уровне в роли производственной системы выступает регион или страна в целом;

здесь ПФ строятся и используются для решения всех трех видов указанных задач.

Выбор единиц измерения расходуемых ресурсов и выпускаемой продукции различен для разных уровней: на микроэкономическом уровне затраты и выпуск могут измеряться и в натуральных, и в стоимостных единицах (показателях); на макроэкономическом уровне затраты и выпуск измеряются в основном в стоимостных показателях.

Экономический смысл производственной функции. В микро- и макроэкономике зависимая переменная y производственной функции имеет разный смысл. В микроэкономической теории y — это *максимально возможный объем выпуска продукции при объеме затраченного ресурса x* . В макроэкономике при разных вариантах распределения ресурса x между структурными единицами экономики выпуски могут быть разными, поэтому под производственной функцией понимают *статистически устойчивую связь между затратой ресурса и выпуском*.

Вообще говоря, для производственной функции более корректной является развернутая запись

$$y = f(\bar{x}, \bar{a}), \quad (8.3)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор ресурсов (независимых переменных), $\bar{a}$ — вектор параметров ПФ.

Пример 1. Рассмотрим производственную функцию вида $y = ax^b$. Здесь x — величина затрачиваемого ресурса, $f(x)$ — объем выпускаемой продукции, a и b — параметры ПФ (положительные числа).

Статические и динамические производственные функции. Производственная функция вида (8.1) или (8.2) называется *статической*, если сама функция и ее параметры не зависят от времени t . Производственная функция называется *динамической*, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) время t входит в функцию f в качестве независимой переменной (временной ресурс);
- 2) параметры производственной функции зависят от времени t .

В динамической ПФ можно учесть, например, научно-технический прогресс (НТП) путем введения в функциональную зависимость (8.1) множителя e^{pt} , где параметр $p > 0$ характеризует темп прироста выпуска вследствие НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (8.4)$$

Типы производственных функций. Приведем два основных наиболее употребимых типа производственной функции.

1. *Линейная ПФ.* Двухфакторная линейная ПФ имеет вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (8.5)$$

Многофакторная линейная ПФ имеет вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{0, n}.$$

Линейная ПФ принадлежит к классу *аддитивных функций*.

2. *Мультипликативная функция.* Двухфакторная мультипликативная функция имеет вид

$$y = a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}, \quad a_0 > 0, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (8.6)$$

Переход от мультипликативной функции к аддитивной производится с помощью логарифмирования:

$$\ln y = \ln a_0 + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2.$$

Обозначая $\ln y = w$, $\ln a_0 = b$, $\ln x_1 = u$, $\ln x_2 = v$, получаем аддитивную ПФ:

$$w = b + \alpha_1 u + \alpha_2 v.$$

Из мультипликативных производственных функций в микро- и макроэкономике наиболее часто используется двухфакторная производственная функция Кобба — Дугласа (так она названа по именам американских ученых, предложивших ее в 1929 г. на основе обработки большого числа статистических данных). В приложениях этой функции одним из ресурсов является объем используемого капитала K , другим — затраты труда L , т.е. функция Кобба — Дугласа имеет вид:

$$Y = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}. \quad (8.7)$$

Эта функция получила широкое распространение благодаря своей структурной простоте. Согласно статистической обработке экономических данных, проводившейся различными авторами, наблюдаются следующие закономерности:

$$\alpha_1 < 1, \quad \alpha_2 < 1, \quad \alpha_1 < \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \approx 1. \quad (8.8)$$

Последнее соотношение в (8.8) обычно принимают определяющим для функции Кобба — Дугласа, и тогда вместо общего вида (8.7) используют формулу

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{\alpha-1}. \quad (8.9)$$

8.1.2. Основные характеристики производственных функций

Свойства производственной функции. Производственные функции обладают специфическими свойствами, что выделяет их среди математических функций. Сформулируем основные свойства ПФ на примере двухфакторной функции $f(x_1, x_2)$ и поясним их экономический смысл.

1. $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$.

Свойство 1 означает, что при отсутствии хотя бы одного ресурса нет выпуска продукции.

2. При $x'_1 > x''_1$ имеем $f(x'_1, x_2) > f(x''_1, x_2)$; аналогично при $x'_2 > x''_2$ имеем $f(x_1, x'_2) > f(x_1, x''_2)$.

Свойство 2 означает, что с увеличением объема использования любого ресурса объем выпуска растет.

3. При $\bar{x} > \bar{0}$ имеем $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0, \quad i = 1, 2$.

Свойство 3 является следствием свойства 2: первые частные производные ПФ положительны. Это означает, что с ростом потребления одного из ресурсов при неизменном объеме другого ресурса объем выпуска возрастает. Здесь и далее условная запись $\bar{x} > \bar{0}$ означает, что обе компоненты вектора $\bar{x} = (x_1, x_2)$ строго положительны.

4. При $\bar{x} > \bar{0}$ имеем $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad i = 1, 2$.

Свойство 4 (вторая производная ПФ по любой координате неположительна) означает, что с ростом объема затрат одного из ресурсов при неизменном объеме использования другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i -го ресурса убывает (это свойство известно как закон убывающей эффективности).

5. При $\bar{x} > \bar{0}$ имеем $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} > 0$.

Это свойство означает, что с ростом затрат одного из ресурсов предельная эффективность другого ресурса возрастает.

6. Для любого $t > 0$

$$f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2). \quad (8.10)$$

Свойство 6 означает, что ПФ является однородной функцией степени p . Иными словами, при переходе от вектора затрат ресурсов $\bar{x}$ к вектору $t\bar{x}$ объем выпуска изменяется в t^p раз. При $p > 1$ имеем рост выпуска в t^p раз с ростом масштаба производства в t раз; при $p < 1$ имеем снижение выпуска в t^p раз с ростом масштаба производства в t раз. При $p = 1$ имеем постоянную эффективность производства независимо от роста его масштаба.

Напомним, что согласно теореме Эйлера для однородной функции $f(x_1, x_2)$ степени p выполнено условие*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = pf(x_1, x_2). \quad (8.11)$$

Свойства 1–6 накладывают определенные ограничения на параметры производственных функций. Нетрудно видеть, что линейные ПФ (8.5) обладают не всеми этими свойствами (не выполнены свойства 1, 2 и 4). Мультипликативные ПФ (8.6), а значит, и ПФ Кобба — Дугласа (8.8), обладают всеми свойствами 1–6 при условиях $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$.

Производственные функции, удовлетворяющие свойствам 1–6, называются *неоклассическими*.

Пример 2. Найти эффективность производства для функции Кобба — Дугласа (8.8) и (8.9).

Решение. Подставим в формулу (8.10) вместо переменных K и L их значения, измененные в t раз; получаем:

$$Y_t = a_0(tK)^{\alpha_1}(tL)^{\alpha_2} = a_0t^{\alpha_1+\alpha_2}K^{\alpha_1}L^{\alpha_2} = a_0t^{\alpha_1+\alpha_2}Y.$$

Из этого результата следует, что функция Кобба — Дугласа общего вида является однородной функцией степени $p = \alpha_1 + \alpha_2$. В том случае, если $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, то имеет место рост эффективности производства при увеличении масштаба производства. Для функции (8.9) $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, и потому при расширении масштаба производства не происходит изменения его эффективности.

Средние и предельные значения производственной функции. Рассмотрим многофакторную ПФ (8.2)

$$y = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

1. *Средней производительностью i -го ресурса, или средним выпуском по i -му ресурсу, называется величина*

$$A_i = \frac{f(\bar{x})}{x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.12)$$

2. *Предельной (маржинальной) производительностью i -го ресурса, или предельным выпуском по i -му ресурсу, называется первая частная производная*

$$M_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.13)$$

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 339.

В приращениях функции и аргумента частную производную можно приближенно представить в виде

$$M_i \approx \frac{\Delta f(\bar{x})}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, предельная производительность i -го фактора производства приближенно показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска при росте объема затрат i -го ресурса на одну единицу.

3. Отношение предельной производительности i -го ресурса к его средней производительности

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(\bar{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.14)$$

называется *эластичностью выпуска* по i -му ресурсу (частной эластичностью выпуска). В экономической теории для эластичности часто используется разностный аналог формулы (8.14):

$$E_i = \frac{\Delta f / f}{\Delta x_i / x_i}.$$

Из этой формулы следует, что эластичность выпуска по i -му ресурсу равна относительному изменению объема выпуска при изменении затрат этого ресурса на 1%.

Сумма всех эластичностей

$$E_{\bar{x}} = E_1 + E_2 + \dots + E_n \quad (8.15)$$

называется *эластичностью производства*.

Средние и маргинальные показатели, а также эластичность производственной функции являются основными характеристиками, используемыми в экономике.

Пример 3. Найдем средние и маргинальные значения, а также эластичности для двухфакторных мультипликативной и аддитивной функций.

1. Для мультипликативной ПФ типа Кобба — Дугласа (8.7) имеем:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f(\bar{x})}{x_1} = a_0 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}, & A_2 &= \frac{f(\bar{x})}{x_2} = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}; \\ M_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha_1 A_1, & M_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2} = \alpha_2 A_2; \\ E_1 &= \frac{M_1}{A_1} = \alpha_1, & E_2 &= \frac{M_2}{A_2} = \alpha_2. \end{aligned}$$

Из полученных выражений с учетом соотношений (8.8) следует, что $M_i < A_i$, $i = 1, 2$, т.е. предельная производительность i -го ресурса меньше средней производительности этого ресурса. Кроме того, мультипликативные функции имеют постоянные частные эластичности и постоянную эластичность производства.

2. Для аддитивной функции вида (8.5) имеем:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f(\bar{x})}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + \frac{a_2 x_2}{x_1}; \\ A_2 &= \frac{f(\bar{x})}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + a_2 + \frac{a_1 x_1}{x_2}; \\ M_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1, \quad M_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = a_2; \\ E_1 &= \frac{M_1}{A_1} = \frac{a_1}{a_0/x_1 + a_1 + a_2 x_2/x_1}, \quad E_2 = \frac{M_2}{A_2} = \frac{a_2}{a_0/x_2 + a_2 + a_1 x_1/x_2}. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что и для аддитивной ПФ предельная производительность i -го ресурса меньше средней производительности этого ресурса.

Наряду со средними и маржинальными показателями в экономике используется еще один важный показатель. Величина

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (8.16)$$

называется *предельной нормой замещения* i -го ресурса j -м ресурсом при постоянном объеме выпуска y (или предельная норма замены ресурсов) для двухфакторной ПФ. Из вида разностного аналога этой формулы $R_{ij} \approx -\Delta x_j / \Delta x_i$ следует, что предельная норма замены ресурсов показывает на сколько единиц увеличатся (уменьшатся) затраты j -го ресурса при уменьшении (увеличении) затрат i -го ресурса при неизменном выпуске продукции.

Выведем выражение для R_{ij} . Поскольку $f(\bar{x}) = \text{const}$, то $df = 0$, т.е. первый дифференциал равен нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Поделив это уравнение на $\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_i$, $i, j = 1, 2$, получаем выражение для предельной нормы замещения i -го ресурса j -м ресурсом:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (8.17)$$

В силу свойства 3 производственной функции этот показатель всегда положителен: $R_{ij} > 0$.

Для двухфакторной производственной функции справедливо равенство

$$R_{12} = \frac{E_1 x_2}{E_2 x_1}, \quad (8.18)$$

что непосредственно проверяется прямой подстановкой выражений для эластичности (8.14) в соотношение (8.17).

Пример 4. Найдём выражения для предельных норм замещения в случаях: 1) производственной функции Кобба — Дугласа (8.7); 2) аддитивной двухфакторной ПФ (8.5).

Решение. 1. Подставляя в формулу (8.18) выражения эластичности для мультипликативной функции, получаем

$$R_{12} = \frac{\alpha_1 L}{\alpha_2 K}, \quad R_{21} = \frac{\alpha_2 K}{\alpha_1 L}.$$

2. Аналогичная подстановка в случае аддитивной ПФ приводит к ещё более простым выражениям:

$$R_{12} = \frac{a_1}{a_2}, \quad R_{21} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Свойства двухфакторных производственных функций. Выведем несколько закономерностей, имеющих важный экономический смысл, для случая двухфакторных ПФ (ресурсы производства представлены в виде двух агрегированных факторов — капитала K и труда L).

1. Определим экономический смысл характеристик ПФ. Отношение A_k объёма выпуска продукции Y к величине K называется *средней фондоотдачей*, а отношение $A_L = Y/L$ — *средней производительностью труда*. Соответственно определяются и предельные характеристики фондоотдачи и производительности труда. Введём ещё один экономический параметр $k = K/L$ — *фондовооружённость*.

2. Нетрудно видеть, что для аддитивной ПФ при $a_0 = 0$ средняя производительность труда складывается из предельной производительности труда и произведения предельной фондоотдачи на фондовооружённость, а средняя фондоотдача — из предельной фондоотдачи и отношения предельной производительности труда к фондовооружённости.

3. Из уравнения (8.11) следует, что для производственной функции со степенью однородности, равной единице (например, функция Кобба — Дугласа (8.9)), получается уравнение

$$M_K K + M_L L = Y. \quad (8.19)$$

Это соотношение показывает, что произведенный продукт может быть разделен на два слагаемых, представляющих вклады затрат капитала и труда соответственно.

4. Параметры ПФ характеризуют степень технологической вооруженности производства. Обратимся к ПФ Кобба — Дугласа (8.9). Чем больше величина α , тем больше затраты капитала по сравнению с затратами труда в выпуске продукции и, следовательно, выше роль технологий. Наоборот, большие относительно α значения показателя степени $1 - \alpha$ свидетельствуют о высокой доле затрат труда в выпуске продукции.

Теперь обратимся к расчетам производственных показателей.

Пример 5. Найти характеристики производства, описываемого ПФ Кобба — Дугласа $Y = 20K^{1/2}L^{1/2}$ при затратах $K = 25$ и $L = 4$ (в условных единицах, обозначим их как е.к. и е.т.).

Решение. Обозначим через е.п. единицу продукции. Средняя фондоотдача $A_K = Y/K = 20 \cdot 5 \cdot 2/25 = 8$ (е.п./е.к.), средняя производительность труда $A_L = Y/L = 50$ е.п./е.т. Предельная фондоотдача и предельная производительность труда соответственно равны:

$$M_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} = 10 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{1/2} = 4 \frac{\text{е.п.}}{\text{е.к.}};$$

$$M_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = 10 \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{1/2} = 25 \frac{\text{е.п.}}{\text{е.т.}}$$

Эластичности выпуска по капиталу и труду равны по $1/2$, т.е. при увеличении затрат труда или капитала на 1% прирост выпуска продукции составит 0,5%.

Пример 6. Эластичности выпуска продукции для некоторого производства по капиталу и труду составляют соответственно 0,25 и 0,75 при затратах 50 е.к. и 10 е.т. и объеме выпуска 150 е.п. Найти прирост продукции при затратах 52 е.к. и 10,8 е.т.

Решение. Приросты затрат капитала и труда составляют 2 е.к. и 0,8 е.т. Средние фондовооруженность и производительность труда равны $A_K = Y/K = 3$, $A_L = Y/L = 15$. Воспользуемся для прироста продукции приближенной формулой для дифференциала функции двух переменных*:

$$\Delta Y \approx \frac{\partial}{\partial K} F(K_0, L_0) \Delta K + \frac{\partial}{\partial L} F(K_0, L_0) \Delta L = E_K A_K \Delta K + E_L A_L \Delta L. \quad (8.20)$$

* См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 335.

Подставляя в эту формулу соответствующие значения для частных эластичностей и приростов капитала и труда, получаем

$$\Delta Y \approx 0,25 \cdot 3 \cdot 2 + 0,75 \cdot 15 \cdot 0,8 = 10,5 \text{ е.п.}$$

В относительных цифрах это означает, что при увеличении затрат капитала на 4% и затрат труда на 5% выпуск продукции возрастет приблизительно на 7%.

Аппарат производственных функций активно используется в моделях поведения производителя, основанных на максимизации прибыли, а также в моделях организации. В этом плане производственная функция описывает технологию организации. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример 7. Выпуск однопродуктовой организации определяется ПФ Кобба — Дугласа $Y = 3K^{1/3}L^{2/3}$. Найти распределение фондов K и затрат труда L , при котором выпуск будет максимальным, если на аренду фондов и оплату труда выделено 150 денежных единиц (д.е.), стоимость аренды фондов $W_K = 10$ д.е. на единицу фондов, ставка заработной платы $W_L = 5$ д.е./чел.

Решение. Пусть K и L — искомые затраты фондов и труда. Тогда по условию задачи имеем $Kw_K + Lw_L = 150$. Из этого уравнения связи выразим одно искомое неизвестное через другое, например, L через K : $L = 150/w_L - Kw_K/w_L = 30 - 2K$. Далее подставляем полученное выражение в уравнение производственной функции, откуда получаем функцию одной переменной — аргумента K : $Y = 3K^{1/3}(30 - 2K)^{2/3}$. Теперь находим точку максимума этой функции, приравнявая к нулю производную:

$$Y' = \frac{(30 - 2K)^{1/3}}{K^{2/3}} - \frac{4K^{1/3}}{(30 - 2K)^{1/3}} = 0.$$

Отсюда последовательно получаем, что $K = 5$ е.ф., $L = 20$ чел.

Убывающая эффективность производства. Рассмотрим производственную функцию Кобба — Дугласа. Поделив обе части уравнения (8.7) на переменную L , получаем с учетом равенства $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ однофакторную производственную функцию

$$y = a_0 k^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (8.21)$$

где $y = Y/L$ — производительность труда, $k = K/L$ — фондовооруженность. График функции (8.21) показан на рис. 8.1. Поскольку $\alpha < 1$, вторая производная

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} = a_0 \alpha (\alpha - 1) k^{\alpha-2} < 0,$$

т.е. кривая выпукла вверх и становится более пологой с ростом k . Это означает, что каждая дополнительная единица ресурса фондовооруженности да-

ет все меньший прирост производительности труда. Это же свойство прослеживается и в зависимости объема выпуска от затрат ресурсов в двухфакторной производственной функции (свойство 4) — замедление темпов роста объема выпуска с увеличением затрат по каждому ресурсу (сечения трехмерного графика этой функции плоскостями $x_1 = \text{const}$ и $x_2 = \text{const}$ приводят к графикам, аналогичным графику функции (8.21)). Указанное обстоятельство в сочетании со свойствами 2 и 3 (рост величины выпуска) отражает фундаментальное положение экономической теории, которое называется *законом убывающей эффективности производства*. Образно говоря, это можно назвать законом «все меньшей отдачи» с ростом производства.

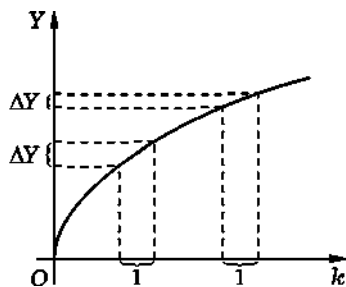


Рис. 8.1

Согласно закону убывающей эффективности производства целесообразно определить, начиная с какого объема затрат ресурсов дальнейшее увеличение таких затрат становится нерентабельным; для этого достаточно определить критическое значение темпа роста объема выпуска.

Изокванты и изоклины производственной функции. Производитель может варьировать наборы факторов при производстве продукции. Существует бесконечное множество различных вариантов наборов факторов, которым соответствует одинаковое количество произведенного продукта — *множество безразличия производителя*. В общем случае производственной функции (8.2) как функции нескольких переменных это множество представляет собой поверхность уровня

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}, \quad (8.22)$$

которая является гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество наборов факторов, удовлетворяющих условию (8.22), называется *изоквантой*.

Нас интересует случай двухфакторной ПФ, когда уравнение (8.22) определяет линии уровня функции двух переменных*, и изокванты представляют собой линии уровня на плоскости KOL , или линии постоянного выпуска

$$F(K, L) = C. \quad (8.23)$$

Изокванты, соответствующие разным значениям постоянной $C > 0$ (разным уровням производства), не пересекаются.

Пример 8. Найти изокванты ПФ Кобба — Дугласа $Y = K^{1/2}L^{1/2}$ и линейной ПФ $Y = 2K + 4L$.

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. — С. 321.

Решение. 1. В первом случае согласно уравнению (8.23) имеем $K^{1/2}L^{1/2} = C$, откуда $K = C/L$. На плоскости KOL изокванты представляют собой семейство гипербол (рис. 8.2, линии 1). На каждой изокванте любая точка соответствует выпуску продукции в объеме данного значения C .

2. Во втором случае имеем $2K + 4L = C$, что определяет семейство ниспадающих прямых линий.

Ранее было введено понятие предельной нормы замещения факторов производства. Величина R_{LK} в некоторой точке плоскости KOL , как следует из определения этой величины (8.17), равна модулю тангенса угла наклона

изокванты, проходящей через данную точку:

$$R_{LK} = |\operatorname{tg} \varphi|.$$

Наряду с изоквантой введем понятие *изоклины* как линии *постоянной предельной нормы замещения i -го фактора j -м фактором*, которая вычисляется по формуле (8.17):

$$R_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = C, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (8.24)$$

Иными словами, вдоль изоклины (i, j) величина R_{ij} постоянна и равна C .

Справедлива теорема, играющая важную роль в экономических приложениях, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 8.1. Изоклины однородных производственных функций являются лучами, выходящими из нулевой точки.

Из теоремы 8.1 следует, что изоклины двухфакторных функций определяются на плоскости KOL как прямые вида (см. рис. 8.2):

$$K = bL. \quad (8.25)$$

Это означает, что изоклины однородной двухфакторной ПФ являются *линиями постоянной фондовооруженности*.

Из теоремы 8.1 следует, что однородная ПФ с постоянной нормой замещения труда капиталом и степенью однородности $p = 1$ является линейной:

$$F(K, L) = aK + bL, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (8.26)$$

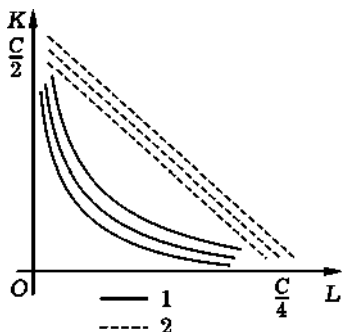


Рис. 8.2

Эластичность замещения факторов. В экономике важную роль играет параметр, называемый *эластичностью замещения факторов*. В общем случае эту величину можно определить как

$$\sigma_{ij} = \frac{d \ln(x_j/x_i)}{d \ln(f'_i/f'_j)}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \quad (8.27)$$

Для двухфакторных ПФ формула (8.27) упрощается, и мы имеем один параметр:

$$\sigma_{LK} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(Y'_L/Y'_K)} = \frac{d \ln k}{d \ln R_{LK}},$$

где R_{LK} — предельная норма замещения труда капиталом. Эту формулу обычно используют в более простой форме:

$$\sigma = \frac{dk}{dR_{LK}} \frac{R_{LK}}{k}. \quad (8.28)$$

Эластичность замещения труда капиталом показывает процентное изменение фондовооруженности K/L при изменении предельной нормы замещения труда капиталом на 1%. Величина $1/\sigma_{LK}$ показывает относительное изменение тангенса угла наклона изокванты на единицу фондовооруженности k . Чем больше меняется наклон изокванты при переходе с изоклины 1 на изоклину 2, т.е. чем больше ее *кривизна*, тем больше величина $1/\sigma_{LK}$ (рис. 8.3).

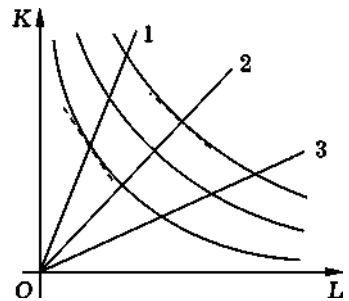


Рис. 8.3

8.1.3. Основные виды производственных функций

Производственная функция CES. Впервые вопрос об общей форме однородной производственной функции был рассмотрен в 1961 г., когда Эрроу и Солоу* ввели функцию с постоянной эластичностью замещения или функцию *CES* (*constant elasticity substitution*). Такая функция записывается формулой

$$Y = (c_1 K^{-\rho} + c_2 L^{-\rho})^{-p/\rho}, \quad (8.29)$$

где c_1 и c_2 — положительные константы; p — параметр однородности ПФ; ρ — величина, определяемая из соотношения

$$\rho = \frac{1 - \sigma}{\sigma}, \quad \rho > -1. \quad (8.30)$$

*Эрроу Кеннет Джозеф (р. 1921) и Солоу Роберт Мертон (р. 1924) — американские экономисты, нобелевские лауреаты в области экономики.

Величина σ рассчитывается по формуле (8.28). Формула (8.29) выводится из условия, что предельная норма замещения труда капиталом (8.24) является функцией только фондовооруженности k и условия $\sigma = \text{const}$.

Уравнение изокванты функции CES получается из условия $Y = C$ и имеет вид

$$K = \left(\frac{C^{-\rho/p} - c_2 L^{-\rho}}{c_1} \right)^{-1/\rho}. \quad (8.31)$$

Кривая (8.31) по форме напоминает гиперболу. Она имеет асимптоты

$$K = \frac{C^{1/p}}{c_1^{-1/\rho}}, \quad L = \frac{C^{1/p}}{c_2^{-1/\rho}}, \quad (8.32)$$

параллельные осям координат OL и OK ; точка пересечения асимптот лежит на луче

$$K = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{-1/\rho} L. \quad (8.33)$$

Графики изоквант функции CES приведены на рис. 8.4, а, б.

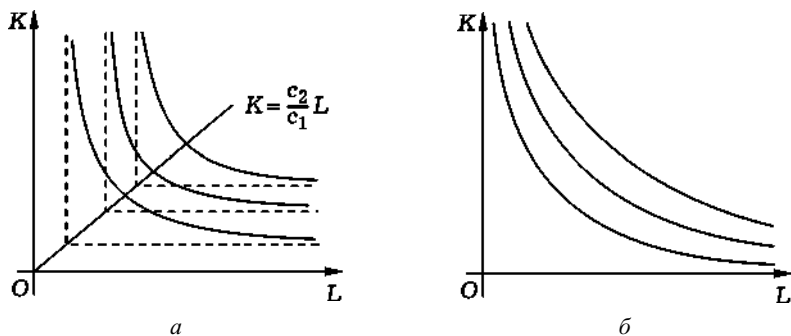


Рис. 8.4

Экономический смысл свойств формы изоквант (8.31) состоит в том, что для производственной системы с функцией CES невозможна полная замена труда капиталом, и наоборот. Асимптотические значения (8.32) означают минимальные количества капитала и труда, которые необходимо затратить, чтобы произвести заданный объем продукции C .

Производственная функция Кобба — Дугласа. Функция Кобба — Дугласа получается как частный случай функции CES при $\sigma = 1$ или $\rho = 0$. Изокванты этой функции (8.9) представляют собой семейство гипербол

$$K = \left(\frac{C}{a_0} \right)^{1/\alpha} L^{1-1/\alpha}, \quad (8.34)$$

асимптотами которых являются оси координат (рис. 8.4, б). Это говорит о том, что в случае производственной системы, описываемой ПФ (8.9), есть возможность почти полного замещения труда капиталом и, наоборот, почти полного замещения капитала трудом.

Предельная норма замещения труда капиталом, как следует из решения примера 4, имеет вид

$$R_{LK} = \frac{1-\alpha}{\alpha}k,$$

откуда получаем уравнения изоклин для ПФ Кобба — Дугласа:

$$K = \frac{\alpha R_{LK} L}{1-\alpha}.$$

Увеличение эластичности по капиталу приводит к увеличению наклона изоклины, увеличение эластичности по труду приводит к уменьшению наклона изоклины.

Производственная функция Кобба — Дугласа широко используется в практике моделирования производственных процессов в системах с масштабами от крупного производства до отрасли, для которых характерно стабильное функционирование.

Производственная функция Леонтьева. В экономике используются *производственные функции с постоянными пропорциями*. Это означает, что в жестком технологическом процессе невозможна замена одного фактора другим, и избыток одного фактора не компенсирует недостаток другого. Функция такого вида называется *производственной функцией Леонтьева*.

При построении функции Леонтьева предполагается, что имеет место свойство линейной однородности: при увеличении затрат факторов в p раз выпуск продукции возрастет также в p раз. По этому признаку функция Леонтьева принадлежит важному классу неоклассических производственных функций. Постоянные пропорции означают, что эластичность замещения труда капиталом стремится к нулю при $\sigma \rightarrow 0$, и тогда $\rho \rightarrow \infty$. В результате предельного перехода получаем:

$$Y = \min \{aK, bL\}, \quad (8.35)$$

где $a > 0$ и $b > 0$. Величины $1/a$ и $1/b$ означают количество единиц капитала и труда соответственно, необходимое для производства единицы продукции; указанные величины задаются — в этом и состоит смысл постоянных пропорций.

Пример 9. Для производства единицы продукции (е.п.) при жестком производственном процессе затрачивается 4 единицы труда (е.т.) и 5 единиц капитала (е.к.). Найти, сколько е.п. можно произвести при наличии 20 е.т. и 30 е.к.

Решение. Наличие 20 е.т. позволяет произвести 5 е.п., а наличие 30 е.к. — 6 е.п. Однако для производства 6 е.п. требуется 24 е.т., тогда как в наличии их только 20. В силу нулевой эластичности замены труда капиталом система может произвести только 5 е.п. В данном случае имеется дефицит труда в количестве 4 единиц и избыток капитала, равный 5 единицам. Количество производимой продукции определяется лимитирующим фактором — минимальным объемом

продукции, который может быть получен из имеющихся ресурсов труда и капитала.

Изокванты $Y = C$ функции Леонтьева состоят из двух лучей, параллельных осям координат и выходящих из точек с координатами $L = C/b$ и $K = C/a$ (рис. 8.5). Эти точки расположены на луче

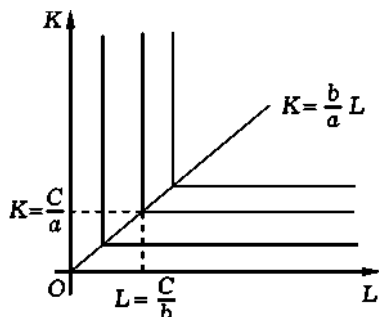


Рис. 8.5

$$K = \frac{b}{a}L, \quad (8.36)$$

выходящем из начала координат. Предельная норма замещения труда капиталом при переходе через угловую точку изокванты меняется скачком от нуля до бесконечности.

Производственная функция Леонтьева широко используется для моделирования производственных процессов в системах производства мелкого масштаба и для описания автоматизированных производственных систем.

Линейная производственная функция. Рассмотрим случай частичного или полного замещения одного фактора другим. Производственный процесс при условиях совершенной взаимной дополняемости факторов назовем *гибким*. Функция, описывающая гибкий производственный процесс и задающая линейную связь между затратами факторов и выпуском продукции, называется *линейной производственной функцией*.

Уравнение линейной однородной ПФ может быть получено как частный случай функции CES (8.29) при бесконечно большой эластичности замещения труда капиталом ($\rho \rightarrow -1$) и степени однородности $p = 1$:

$$F(K, L) = aK + bL, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (8.37)$$

Отметим, что линейная ПФ не обладает рядом свойств, присущих неоклассическим ПФ (см. также п. 8.1.2). Например, при отсутствии затрат одного из факторов выпуск продукции согласно формуле (8.37) не равен нулю. Не соблюдается и закон убывания предельных выпусков ($F''_{KK} < 0$, $F''_{LL} < 0$) — для линейной ПФ $F''_{KK} = F''_{LL} = 0$, т.е. соблюдается условие их постоянства.

Коэффициенты a и b являются постоянными величинами предельных выпусков.

Уравнения изоквант линейной производственной функции имеют вид

$$K = \frac{C}{a} - \frac{bL}{a}, \quad (8.38)$$

а их графики представляют собой семейство параллельных прямых (рис. 8.6). Предельная норма замещения труда капиталом является постоянной величиной и согласно формуле (8.17) равна:

$$R_{LK} = \frac{b}{a}. \quad (8.39)$$

Хотя линейные ПФ не относятся к неоклассическим ПФ, они в силу своей простоты широко применяются при моделировании в сфере макроэкономики, на уровне отраслей промышленности и национальных экономик, когда выпуск агрегированной продукции (или продукции в стоимостном выражении) обеспечивается функционированием большой совокупности разнообразных технологических процессов.

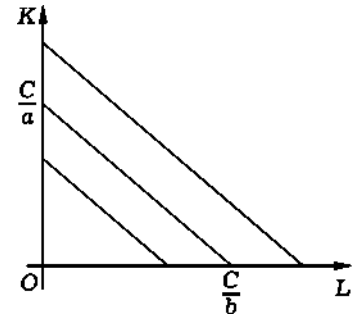


Рис. 8.6

8.2. Модель потребительского выбора

Будем полагать, что имеется n различных товаров. Тогда некоторый набор товаров будем обозначать через n -мерный вектор

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.40)$$

где x_i — количество i -го товара. Естественные ограничения на набор товаров — неравенства $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$, или в условной записи $\bar{x} \geq \bar{0}$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор. Множество всех наборов товаров X называется пространством, так как в нем выполнены линейные операции: можно сложить любые два набора и умножить любой набор на любое неотрицательное число (последнее справедливо для случая безграничной делимости и умножения товаров).

Выбор индивида-потребителя характеризуется отношением предпочтения: полагаем, что потребитель может сказать о любых двух наборах, какой из них ему более желателен или для него между ними нет разницы. Отношение предпочтения транзитивно: если набор $\bar{x}$ предпочтительнее набора $\bar{y}$, а

набор $\bar{y}$ предпочтительнее набора $\bar{z}$, то набор $\bar{x}$ предпочтительнее набора $\bar{z}$. Будем полагать, что поведение потребителя полностью описывается *аксиомой индивида-потребителя*: каждый индивид-потребитель принимает решения о потреблении, покупках, выборе набора товаров и иные подобные решения исходя только из своей системы предпочтений.

8.2.1. Функция полезности

Общие понятия. На множестве потребительских наборов X определена функция

$$u(\bar{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.41)$$

значение которой на потребительском наборе $\bar{x}$ равно потребительской оценке индивида этого набора. Функция $u(\bar{x})$ называется *функцией полезности потребителя*, или функцией потребительского предпочтения. Согласно этому определению каждый потребитель имеет свою функцию полезности, и на первый взгляд мы получаем огромное множество таких функций. Однако все множество потребителей можно разделить на определенные классы (по возрасту, имущественному положению и т.п.), и каждому классу приписать некоторую, может быть осредненную, функцию полезности.

Таким образом, функция $u(\bar{x})$ является потребительской оценкой, или *уровнем удовлетворения* потребностей индивида при приобретении данного набора $\bar{x}$. Если набор $\bar{x}$ предпочтительнее набора $\bar{y}$ для данного индивида, то $u(\bar{x}) > u(\bar{y})$.

Свойства функции полезности. Укажем свойства функции полезности в предположении о ее дифференцируемости.

1. Функция полезности имеет положительные частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u'_{x_i} > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.42)$$

Первые частные производные функции полезности называются *предельными полезностями продуктов*. Из этого свойства вытекает, что если увеличивается потребление k -го продукта ($x'_k > x''_k$) при неизменном количестве других продуктов, то

$$u(x_1, \dots, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n) > u(x_1, \dots, x''_k, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

т.е. возрастание потребления одного продукта при неизменном потреблении других продуктов приводит к росту потребительской оценки. Напомним, что вектор

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

называется градиентом функции $u(\bar{x})$; он показывает направление наибольшего роста функции. Для функции полезности $u(\bar{x})$ ее градиент представляет собой вектор предельных полезностей продуктов.

2. Вторые частные производные функции полезности отрицательны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''_{x_i x_i} < 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.43)$$

т.е. предельная полезность любого товара уменьшается с ростом его потребления. Это свойство называется *законом Госсена**. Он впервые на практике установил эту закономерность.

3. Смешанная частная производная функции полезности положительна:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u''_{x_i x_j} > 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \quad (8.44)$$

Это свойство означает, что предельная полезность каждого продукта увеличивается с ростом потребления другого продукта.

Нетрудно видеть, что указанные свойства функции полезности аналогичны свойствам 3–5 производственной функции (см. п. 8.1). Формально это следует из представления функции полезности как производственной функции, ресурсами которой являются товары, а выпуском — уровень удовлетворения потребностей потребителя.

Виды функции полезности. Приведем несколько наиболее часто используемых видов функций полезности, удовлетворяющих принятым допущениям.

1. Неоклассическая:

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (8.45)$$

2. Неоклассическая мультипликативная функция общего вида

$$u(\bar{x}) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i}, \quad (8.46)$$

где $x_i > a_i \geq 0, \alpha_i > 0, i = \overline{1, n}$.

3. Логарифмическая функция:

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - b_i), \quad (8.47)$$

где $a_i > 0, x_i > b_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

*Госсен Герман Генрих (1810–1858) — немецкий экономист.

8.2.2. Задача потребительского выбора

Линии безразличия. В прикладных задачах и моделях потребительского выбора часто используется частный случай набора из двух товаров, когда функция полезности зависит от двух переменных. Здесь вводится понятие *линии безразличия*. Это линия, соединяющая потребительские наборы, имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивида. По сути линии безразличия представляют собой линии уровня функции $u(x_1, x_2)$ или, что то же самое, сечения поверхности $u = u(x_1, x_2)$ плоскостями, параллельными плоскости $x_1 O x_2$. Уравнения линий безразличия имеют вид:

$$u(x_1, x_2) = \text{const.} \quad (8.48)$$

Множество линий безразличия называется картой линий безразличия (карта линий уровня — это снесенные на плоскость $x_1 O x_2$ линии уровня, соответствующие различным значениям постоянной величины в правой части (8.48)). Карта линий безразличия изображается на плоскости $x_1 O x_2$ в виде семейства кривых. Понятие линий безразличия встречается во многих экономических приложениях с задачами оптимизации экономических процессов.

Для многомерной функции полезности (8.41), определенной в пространстве многомерных наборов (8.40), т.е. в n -мерном евклидовом пространстве, аналогичным образом можно ввести в рассмотрение *поверхность безразличия* — поверхность уровня функции (8.41), представляющую собой гиперповерхность размерности $n - 1$.

Укажем основные свойства линий безразличия.

1. Линии безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей, не касаются и не пересекаются. Это следует из их определения (8.48): иначе одной линии безразличия соответствовали бы две разные константы.

2. Линии безразличия убывают. Рассмотрим уравнение этой линии в виде

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad (8.49)$$

которое можно получить из (8.48). Дифференциал функции вдоль линии уровня равен нулю, т.е. $du(x_1, x_2) = u'_{x_1} dx_1 + u'_{x_2} dx_2 = 0$, откуда следует, что первая производная функции (8.49), имеющая вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}}, \quad (8.50)$$

отрицательна в силу свойства 1 функций полезности (формула (8.42)).

3. Линии безразличия выпуклы вниз. Действительно, вторая производная функции (8.49) согласно правилу дифференцирования частного вычисляется по формуле

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right) = - \frac{u''_{x_1 x_1} (u'_{x_2})^2 - 2u''_{x_2 x_1} u'_{x_1} u'_{x_2} + u''_{x_2 x_2} (u'_{x_1})^2}{(u'_{x_2})^3}.$$

Нетрудно видеть, что согласно свойствам 2 и 3 функций полезности выражение в правой части этого равенства положительно, т.е. график функции (8.49) является выпуклым вниз. Характерный вид линий безразличия функции полезности показан на рис. 8.7.

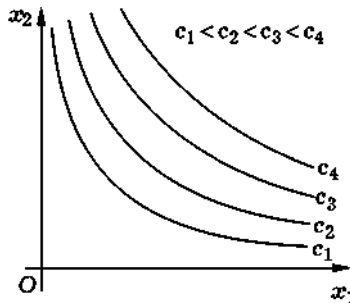


Рис. 8.7

Норма замены. Из формулы (8.50) следует важное приближенное равенство

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}}.$$

Это соотношение показывает, на сколько индивид должен увеличить (уменьшить) потребление второго продукта при уменьшении (увеличении) потребления первого продукта на одну единицу без изменения уровня удовлетворения своих потребностей. Отношение $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ называется *нормой замены* первого продукта вторым, а величина $\frac{dx_2}{dx_1}$ — *предельной нормой замены* первого продукта вторым.

Пример 10. Если предельная полезность первого товара равна 6, а второго — 2, то при уменьшении потребления первого товара на единицу для сохранения уровня удовлетворения потребностей нужно увеличить потребление второго товара на 3 единицы.

Бюджетное множество. Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — вектор цен на набор из n продуктов $\bar{x}$. Пусть некоторая денежная сумма I — доход, который индивид готов потратить на приобретение набора продуктов $\bar{x} \in X$ (на самом деле это

расход индивида на набор продуктов). Множество наборов товаров стоимостью не более I при данных ценах $\bar{p}$ называется *бюджетным множеством* $B \subset X$. Множество наборов стоимостью I является границей G множества B . Таким образом, множество B состоит из наборов с естественными ограничениями $\bar{x} \geq \bar{0}$.

Граница G определяется соотношением $\bar{p}\bar{x} = I$, в то время как бюджетное множество B описывается системой неравенств

$$\bar{x} \geq \bar{0}, \quad \bar{p}\bar{x} \leq I. \quad (8.51)$$

В развернутой форме эти соотношения имеют следующий вид:

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq I. \quad (8.52)$$

Для случая набора из двух товаров бюджетное множество представляет собой треугольник в системе координат x_1Ox_2 , ограниченный координатными осями и прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ (рис. 8.8).

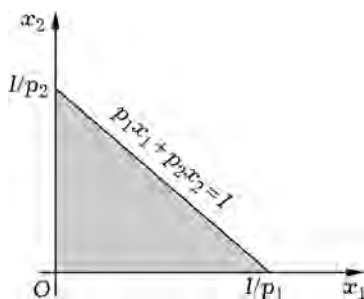


Рис. 8.8

Формулировка задачи потребительского выбора. В теории потребления предполагается, что потребитель всегда стремится максимизировать свою полезность. Единственным ограничением для него является величина дохода I , который потребитель может потратить на покупку набора товаров. В общем виде задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) формулируется следующим образом: найти такой потребительский набор

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad (8.53)$$

при котором функция полезности потребителя достигает максимума на заданном бюджетном множестве. Формальный вид задачи потребительского выбора представляет собой типичную задачу оптимизации, состоящую в поиске точки максимума (8.53) функции полезности на бюджетном множестве:

$$\begin{cases} u(\bar{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq I. \end{cases} \quad (8.54)$$

Рассмотрим задачу потребительского выбора для случая набора из двух товаров:

$$\begin{cases} u(\bar{x}) = u(x_1, x_2) \rightarrow \max; \\ x_{1,2} \geq 0, \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I. \end{cases} \quad (8.55)$$

Поиск оптимального набора $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ можно интерпретировать графически как последовательный переход на линии безразличия более высокого уровня полезности (рис. 8.9) — вправо-вверх — до тех пор, пока эти линии имеют общие точки с бюджетным множеством. Из геометрии бюджетного множества B (см. рис. 8.8) и формы линий безразличия (см. рис. 8.7) следует, что искомая точка (x_1^*, x_2^*) лежит на границе G , т.е. на прямой $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$. Значит, задача потребительского выбора сводится к задаче на условный экстремум: найти точку (x_1^*, x_2^*) максимума функции $u(x_1, x_2)$ при условии, что переменные x_1 и x_2 связаны равенством $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$. В условной записи:

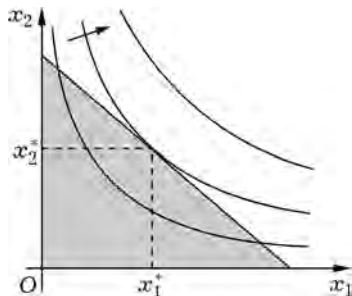


Рис. 8.9

$$\begin{cases} u(\bar{x}) = u(x_1, x_2) \rightarrow \max; \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \quad (8.56)$$

В общем случае n -мерного бюджетного множества B также справедливо, что точка $\bar{x}^*$ лежит на границе G (на гиперплоскости), определяемой условием $\bar{p}\bar{x} = I$. Поэтому задача потребительского выбора формулируется аналогичным образом в виде задачи на условный экстремум:

$$\begin{cases} u(\bar{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max; \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = I. \end{cases} \quad (8.57)$$

Последнее уравнение в (8.57) называется уравнением связи.

Решение задачи потребительского выбора. Начнем со случая двухтоварных наборов. Для решения задачи используется метод Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (8.56) при условии одной связи имеет вид

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I), \quad (8.58)$$

где λ — множитель Лагранжа. Далее ищется точка максимума функции L : все три частных производные этой функции приравниваются к нулю, и мы получаем

систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = u'_{x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = u'_{x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений неизвестную λ , получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} \frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases} \quad (8.59)$$

Решение (x_1^*, x_2^*) системы уравнений (8.59) является решением задачи потребительского выбора.

В многомерном случае (8.57) также используется метод Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(\bar{x}, \lambda) = u(\bar{x}) + \lambda(\bar{p}\bar{x} - I). \quad (8.60)$$

Далее согласно условиям максимума составляется система из $n + 1$ уравнений относительно $n + 1$ неизвестных $\bar{x}$ и λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = u'_{x_i} - \lambda p_i = 0, & i = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{p}\bar{x} - I = 0. \end{cases} \quad (8.61)$$

Исключая из этих уравнений неизвестную λ , получаем систему n уравнений относительно n неизвестных — координат точки условного максимума:

$$\begin{cases} \frac{u'_{x_i}}{u'_{x_j}} = \frac{p_i}{p_j}, & i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{i+1, n}; \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = I. \end{cases} \quad (8.62)$$

Решение $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ этой системы уравнений — точка условного экстремума — является решением общей задачи потребительского выбора.

Точка $\bar{x}^*$ называется *точкой локального рыночного равновесия*. Первое соотношение (8.62) показывает, что отношение предельных полезностей продуктов в точке локального рыночного равновесия, или *предельная норма замены* i -го продукта j -м продуктом $u'_{x_i}(\bar{x}^*)/u'_{x_j}(\bar{x}^*)$ равна отношению рыночных цен на эти продукты. Этот результат играет важную роль в экономической теории.

Определим экономический смысл множителя Лагранжа λ . Функцию Лагранжа можно рассматривать также как функцию полезности. Поскольку частные производные функции полезности определяются как предельные полезности соответствующих продуктов, производная функции Лагранжа по λ , приводящая к уравнению затрат дохода I на приобретение набора товаров, означает, что переменная λ является *предельной полезностью денег*.

Так как функция полезности удовлетворяет условиям дифференцируемости (8.42)–(8.44) и строго вогнута вниз (для многомерного случая это свойство также выполняется), при естественных ограничениях на векторы цен и набора товаров (все компоненты должны быть неотрицательными), задача определения оптимального набора товаров как задача на условный экстремум имеет единственное решение $\bar{x}^*$ при любом положительном доходе I .

8.2.3. Функции спроса

Определение функций спроса. Решение задачи потребительского выбора $\bar{x}^*$ называется *точкой спроса*. Эта точка спроса зависит от цен $\bar{p}$ и дохода I . Иными словами, точка спроса является функцией цен и дохода, т.е. *функцией спроса*. В свою очередь функция спроса представляет собой вектор-функцию $n + 1$ аргумента (в общем случае n цен $p_1, p_2, \dots, p_n$ и дохода I), состоящую из n компонентов:

$$\bar{x}^* = \bar{x}^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I) = \bar{x}^*(\bar{p}, I).$$

Таким образом, функция спроса — это набор n функций, каждая из которых зависит от $n + 1$ аргумента:

$$\bar{x}_i^* = \bar{x}_i^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I) = \bar{x}^*(\bar{p}, I), i = \overline{1, n}. \quad (8.63)$$

Функции (8.63) называются *функциями спроса* соответствующих товаров.

Пример 11. Для набора из двух товаров на рынке, известных ценах на них p_1 и p_2 и дохода I найти функции спроса, если функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2} = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$.

Решение. Дифференцируя данную функцию полезности, получаем:

$$u'_{x_1} = \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}, \quad u'_{x_2} = \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}.$$

Далее подстановка в формулы (8.59) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что затраты денежных средств на оба вида товаров должны быть одинаковыми, т.е. $p_1 x_1 = p_2 x_2$. Тогда из второго уравнения получаем, что функции спроса имеют вид:

$$x_1^* = \frac{I}{2p_1}, \quad x_2^* = \frac{I}{2p_2}.$$

Иными словами, в данном случае расход на каждый товар составляет половину дохода потребителя, а количество приобретенного товара равно затраченной на него сумме, поделенной на цену товара.

Характеристики функций спроса. Введем важные экономические характеристики, связанные с функциями спроса. Назовем *средней производительностью цены j -го товара в i -й функции спроса* (8.63) (спроса на i -й товар) долю этого спроса, приходящуюся на единицу цены j -го товара

$$A_{ij} = \frac{x_i^*(\bar{p}, I)}{p_j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (8.64)$$

Таким же образом можно определить и среднюю производительность дохода I в спросе на товары.

Предельной производительностью цены j -го товара в спросе на i -й товар назовем частную производную

$$M_{ij} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}. \quad (8.65)$$

Частный коэффициент эластичности i -го товара по цене j -го товара определяется как отношение предельного изменения спроса, обусловленного изменением цены p_j , к средней производительности A_{ij} :

$$E_{ij} = \frac{M_{ij}}{A_{ij}} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i^*} = \frac{dx_i^*}{x_i^*} \bigg/ \frac{dp_j}{p_j}. \quad (8.66)$$

Напомним, что аналогичные характеристики были введены для производственных функций в предыдущей главе.

Удобство коэффициентов эластичности заключается в их безразмерности, что позволяет использовать их для сравнительного анализа спроса на разные виды товаров. Экономический смысл частных коэффициентов эластичности непосредственно следует из их вида: E_{ij} показывает, на сколько процентов изменится спрос на i -й товар $\frac{dx_i^*}{x_i^*}$ при изменении цены j -го товара $\frac{dp_j}{p_j}$ на 1%.

Пример 12. Для функции полезности $u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ найти функции спроса и их характеристики по товару каждого вида.

Решение. Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$ — ценовой вектор, I — сумма, расходуемая на покупки набора товаров в количестве $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Подстановка частных производных функции u в уравнения (8.59) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем функции спроса:

$$x_1^* = \frac{I p_2}{p_1(p_1 + p_2)}, \quad x_2^* = \frac{I p_1}{p_2(p_1 + p_2)}.$$

Затем находим выражения для средних производительностей цен товаров по формуле (8.64):

$$A_{11} = \frac{I p_2}{p_1^2(p_1 + p_2)}, \quad A_{12} = \frac{I}{p_1(p_1 + p_2)}, \quad A_{21} = \frac{I}{p_2(p_1 + p_2)}, \quad A_{22} = \frac{I p_1}{p_2^2(p_1 + p_2)}.$$

Соответствующие предельные эластичности согласно формуле (8.66) определяются выражениями

$$E_{12} = \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \quad E_{21} = \frac{p_2}{p_1 + p_2}, \quad E_{11} = -1 - E_{12}, \quad E_{22} = -1 - E_{21}.$$

Из полученного результата видно, что при увеличении цены первого товара на 1% и неизменной цене второго товара спрос на второй товар увеличится на $\frac{p_2}{p_1 + p_2}$ процентов, а спрос на первый товар уменьшится на $1 + \frac{p_1}{p_1 + p_2}$ процентов. При увеличении цены первого товара на 1% при неизменной цене второго цены на товары соответственно уменьшатся на $1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2}$ и возрастут на $\frac{p_1}{p_1 + p_2}$ процентов. Смена возрастания цены на ее уменьшение приводит к смене знаков в полученных результатах.

8.2.4. Модель Р. Стоуна

Модель потребительского спроса с неоклассической функцией полезности мультипликативного вида

$$u(\bar{x}) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i}, \quad x_i > a_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.67)$$

носит имя Р. Стоуна*. Здесь a_i — минимально необходимое количество i -го товара, которое приобретается в любом случае. Набор $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ можно

* Стоун Ричард (1913–1991) — английский экономист, лауреат Нобелевской премии.

рассматривать как минимальную корзину потребления. Для приобретения минимального набора $\bar{a}$ необходимо, чтобы доход был больше стоимости этого набора, т.е.

$$I > \prod_{i=1}^n p_i a_i. \quad (8.68)$$

Показатели степеней $\alpha_i > 0$ в (8.67) характеризуют относительную «ценность» соответствующих товаров для потребителя.

Добавив к целевой функции (8.67) бюджетные ограничения, получим задачу потребительского выбора (8.54), называемую моделью Р. Стоуна. Приравняв нулю частные производные функции Лагранжа L по всем переменным, получим систему $n + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_i u(\bar{x})}{x_i - a_i} + \lambda p_i = 0, & i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i = I. \end{cases}$$

Из соотношений первого вида получаем выражения для неизвестных x_i :

$$x_i = a_i - \frac{\alpha_i u(\bar{x})}{\lambda p_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.69)$$

Умножив каждое из уравнений (8.69) на λp_i и просуммировав их по i , получим:

$$u(\bar{x}) \sum_{i=1}^n \alpha_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - \sum_{i=1}^n p_i a_i \right) = 0.$$

Отсюда заключаем, что отношение $u(\bar{x})/\lambda$ с учетом условия связи имеет вид:

$$\frac{u(\bar{x})}{\lambda} = \frac{I - \sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.69), получаем в окончательном виде формулы для функций спроса:

$$x_i^* = a_i + \frac{\frac{\alpha_i}{p_i} \left(I - \sum_{i=1}^n p_i a_i \right)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.70)$$

Полученные функции спроса легко интерпретировать по последовательности действий.

1. Сначала приобретается набор $\bar{a}$ товаров в необходимом количестве.
2. Затем рассчитывается оставшаяся сумма денег.
3. Эта сумма денег распределяется пропорционально весам «ценности» α_i товаров.
4. Поделив распределенные на приобретение каждого товара суммы денег на соответствующие цены этих товаров, получаем приобретаемое сверх минимума a_i количество i -го товара.

Укажем частный случай модели Р. Стоуна:

$$a_i = 0, \quad \alpha_i = \alpha, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.71)$$

Это соответствует предположению о «нулевой» потребительской корзине и равноценности всех товаров. В этом случае из (8.70) получаем:

$$x_i^* = \frac{I}{np_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.72)$$

т.е. доход I делится на n равных частей и количество приобретаемого i -го товара обратно пропорционально его цене. Здесь спрос растет при росте дохода с единичной эластичностью и уменьшается с ростом цены с эластичностью, равной -1 .

8.2.5. Уравнение Слуцкого

В теории потребительского выбора и в исследовании функций спроса основополагающую роль играет уравнение, полученное Е.Е. Слуцким* в 1915 г. Приведем здесь вывод уравнения Слуцкого в общем случае набора из n товаров и его интерпретацию**.

Рассмотрим функции спроса (8.63). При неизменной величине функции полезности в точке локального рыночного равновесия

$$u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \text{const} \quad (8.73)$$

(на гиперповерхности уровня этой функции) приращение функции x_i^* , обусловленное изменением только величины цены p_j , равно:

$$\Delta x_i^* = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{I=\text{const}} \Delta p_j + \frac{\partial x_i^*}{\partial I} \Delta I, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

* Слуцкий Евгений Евгеньевич (1880–1948) — советский математик, статистик и экономист.

** Приводимый здесь вывод принадлежит Г.А. Шапошниковой.

Поделив обе части на Δp_j и переходя к пределу при $\Delta p_j \rightarrow 0$, получаем:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{u=\text{const}} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{I=\text{const}} + \frac{\partial x_i^*}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8.74)$$

Поскольку $I = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + \dots + p_n x_n^*$, то при изменении цены p_j на величину Δp_j приращение дохода ΔI составит:

$$\Delta I = p_1 \Delta x_1^* + p_2 \Delta x_2^* + \dots + p_n \Delta x_n^* + x_j^* \Delta p_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8.75)$$

Как следствие, из формулы (8.75) получаем, что

$$\frac{\partial I}{\partial p_j} = p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_j} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_j} + \dots + p_n \frac{\partial x_n^*}{\partial p_j} + x_j^*, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8.76)$$

Так как дифференциал функции (8.73) равен нулю, имеем соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1^*} \Delta x_1^* + \frac{\partial u}{\partial x_2^*} \Delta x_2^* + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n^*} \Delta x_n^* = 0. \quad (8.77)$$

В точке локального рыночного равновесия в силу уравнений (8.61) имеем соотношения пропорциональности первых производных функции полезности и соответствующих цен:

$$u'_{x_i} = \lambda p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

После подстановки этих соотношений в (8.77) и сокращения обеих частей на сомножитель λ , получаем:

$$p_1 \Delta x_1^* + p_2 \Delta x_2^* + \dots + p_n \Delta x_n^* = \bar{p} \Delta \bar{x}^* = 0. \quad (8.78)$$

После деления соотношения (8.78) на Δp_j и предельного перехода при $\Delta p_j \rightarrow 0$, получаем, что

$$p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_j} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_j} + \dots + p_n \frac{\partial x_n^*}{\partial p_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Подстановка этих уравнений в уравнение (8.75) приводит к формулам

$$\frac{\partial I}{\partial p_j} = x_j^*, \quad j = \overline{1, n},$$

т.е. в точке рыночного равновесия относительное изменение дохода, вызванное изменением цены на товар, равно количеству этого товара. Подставляя эти формулы в формулы (8.74), окончательно получаем:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{u=\text{const}} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{I=\text{const}} + \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (8.79)$$

Поскольку первое слагаемое в правой части представляет собой действие эффекта изменения цены при неизменном доходе на компенсационную добавку величины продукта, оно называется компенсационным (comp). Само же уравнение Слуцкого получается при переносе второго слагаемого в другую часть и используется в следующей форме:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (8.80)$$

Поясним экономический смысл уравнения Слуцкого (8.80). Левая часть уравнения (8.80) представляет собой «отклик» точки спроса при неизменном доходе на изменение цены j -го товара. Второе слагаемое в правой части описывает действие эффекта дохода: это произведение, в котором одним из сомножителей является «отклик» точки спроса на изменение дохода I , а другим — величина спроса на j -й товар. Первое слагаемое в правой части (8.80) интерпретируется следующим образом: при изменении цены j -го товара на Δp_j при неизменных остальных ценах и доходе изменяются точка спроса и максимальная полезность; изменим доход так, чтобы значение максимальной полезности осталось неизменным — это и является компенсацией.

К уравнению Слуцкого присоединяется ряд соотношений, которые получаются в процессе вывода этого уравнения. Перечислим их, поскольку они носят четкий экономический характер. Часть их мы приводим ниже без вывода. Итак, в точке локального рыночного равновесия (8.63) справедливы следующие соотношения.

1. Уравнение (8.78):

$$p_1 \Delta x_1^* + p_2 \Delta x_2^* + \dots + p_n \Delta x_n^* = 0.$$

Это уравнение связывает прежние цены с приращениями товаров, что придает сложный характер изменению спроса: спрос на одни блага растет, а на другие — падает.

2. Из уравнения (8.75) с учетом (8.78) получаем:

$$dI = x_1^* dp_1 + x_2^* dp_2 + \dots + x_n^* dp_n. \quad (8.81)$$

Это соотношение означает, что при увеличении цен компенсация дохода должна быть положительной, а при уменьшении — отрицательной, что достаточно очевидно.

3. Условия

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} < 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.82)$$

означают, что при повышении цены спрос на товар падает даже при компенсации дохода.

4. Уравнение

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} p_1 + \frac{\partial x_2^*}{\partial I} p_2 + \dots + \frac{\partial x_n^*}{\partial I} p_n = 1 \quad (8.83)$$

показывает, что часть слагаемых суммируется со знаком плюс, а часть — со знаком минус. Товар называется «ценным», если при повышении дохода спрос на него растет, в противном случае товар является малоценным. Из уравнения (8.83) вытекает, что не все слагаемые отрицательные, т.е. существуют ценные товары. Например, высококачественные продукты и предметы роскоши являются ценными, а маргарин — малоценным. При повышении дохода (расхода I , предназначенного для приобретения товаров) употребление маргарина снижается, в то время как потребление высококачественного масла возрастает.

5. Из уравнения

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} p_1 + \left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} p_2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} p_n = 0 \quad (8.84)$$

с учетом неравенств $p_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, и неравенств (8.82) следует, что некоторого j -го товара $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} > 0$. Иными словами, при повышении цены на i -й товар потребление j -го товара растет при компенсационном изменении дохода I . В таком случае j -й товар называется заменяющим i -й товар. Например, для большинства потребителей рыба может заменить мясо при повышении цены на него, соответственно картофель — хлеб, а растительное масло — сливочное масло.

8.3. Некоторые модели управления запасами

Предприятия имеют различные запасы: сырье, комплектующие изделия, готовую продукцию, предназначенную для продажи, и т.д. Совокупность подобных материалов, представляющих временно не используемые экономические ресурсы, называют *запасами предприятия*.

Запасы создаются по различным причинам. Одна из них состоит в том, что при отсутствии на складе в некоторый момент производства необходимых деталей, которые поставяет другое предприятие, процесс производства может остановиться. Поэтому на складе всегда должно быть нужное количество деталей данного вида. Однако если увеличить запасы, то возрастет стоимость их хранения. Задача управления запасами состоит в выборе для предприятия целесообразного решения. Главная цель управления запасами — минимизация издержек, связанных с приобретением и хранением запасов.

Рассмотрим простейшие математические модели управления запасами. На рис. 8.10 представлены возможные графики изменения запаса Q , имеющегося на

складе, по времени t , для которого рассматривается этот запас.

Под Q будем понимать изделия или материалы (товары) только одного вида. Если на изделия поступает заявка, то они отпускаются и значение Q падает. Предположим, что величина спроса непрерывна во времени. Если $Q = 0$, то имеет место дефицит.

Любая математическая модель, которая применяется для изучения определенной ситуации в управлении запасами, должна учитывать факторы, связанные с издержками.

Различают *организационные издержки* — расходы, связанные с выполнением заказов потребителей и представляющие собой расходы на учетные операции, заработную плату работникам склада, занятым обработкой заказа, транспортировку и другие операции по доставке товара.

Издержки содержания запасов — затраты, связанные с хранением. К ним относится стоимость содержания складских помещений (охрана, освещение, отопление), страховые платежи, амортизация в процессе хранения (изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т.д.).

Существуют *издержки, связанные с дефицитом*: если поставка со склада не может быть выполнена, то из-за отказа возникают дополнительные издержки. Это может быть денежный штраф или ущерб, невидимый непосредственно (например, ухудшение бизнеса в будущем и потери потребителей).

Отметим, что чем крупнее заказ, тем ниже организационные издержки на единицу заказываемого товара и выше издержки на его содержание.

Количество товара, поставляемое на склад, называют *размером партии*.



Рис. 8.10

8.3.1. Основная модель управления запасами

Введем обозначения, необходимые для составления модели величин (табл. 8.1).

График изменения запасов представлен на рис. 8.11.

Чтобы полностью удовлетворить годовой спрос g при размере поставки q , необходимо обеспечить g/q поставок или партий за год. Средний уровень запасов составляет $q/2$.

Уравнение издержек будет иметь вид

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{bg}{q} + sg + \frac{hq}{2}, \quad (8.85)$$

Таблица 8.1

Величина	Обозначение	Единица измерения	Предложения
Интенсивность спроса	g	Единиц товара в год	Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	b	Рублей за год	Издержки постоянны, не зависят от размера партии
Стоимость товара	s	Рублей за год	Цена единицы товара постоянна; рассматривается один вид товара
Издержки содержания запасов	h	Рублей за единицу товара в год	Стоимость хранения единицы товара в течение года постоянна
Размер партии	q	Единиц товара в одной партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю

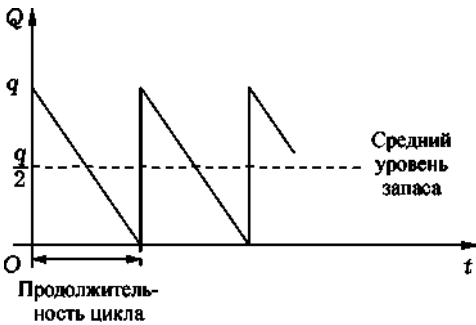


Рис. 8.11

где C_1 — общие организационные издержки; C_2 — стоимость товаров; C_3 — общие издержки содержания запасов.

За исключением q , все величины в правой части уравнения (8.85) постоянны и известны, т.е. $C = f(q)$. Для нахождения минимума C найдем производную $\frac{dC}{dq}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{bg}{q^2} + \frac{h}{2} = 0,$$

откуда

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2bg}{h}},$$

где $q_{\text{опт}}$ — оптимальный размер партии.

Несоответствие заказываемого размера партии товара оптимальному значению приводит к увеличению издержек на содержание и организацию поставок. Покажем, что это так.

При $q = q_{\text{опт}}$ имеем

$$C - C_2 = C - sg = bg\sqrt{\frac{h}{2bg}} + h\sqrt{\frac{2bg}{4h}} = \sqrt{2bgh}.$$

Предположим, что вместо оптимального размера была заказана партия товара, равная $0,5q_{\text{опт}}$, тогда из основного уравнения издержек (8.85) найдем

$$C' - C'_2 = 2bg\sqrt{\frac{h}{2bg}} + h\sqrt{\frac{2bg}{16h}} = \sqrt{\frac{50bgh}{16}} = \frac{5}{4}(C - C_2).$$

Таким образом, заказ партии товара размером $0,5q_{\text{опт}}$ (вместо $q_{\text{опт}}$) приводит к увеличению общих издержек на содержание запасов и организацию поставок на 25%. Аналогичная картина наблюдается в случае заказа товара больше, чем $q_{\text{опт}}$.

Изобразим графически (рис. 8.12) изменение отдельных составляющих величин C .

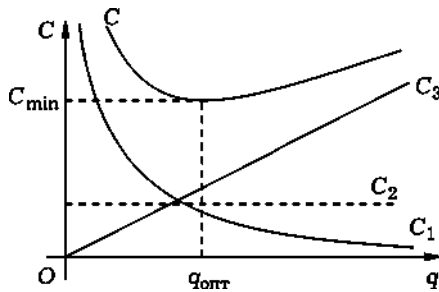


Рис. 8.12

Из рис. 8.12 следует, что увеличение q ведет к резкому снижению C_1 , при этом C_3 увеличивается пропорционально $h/2$. При малых значениях q величина C падает до значения C_{min} в точке $q_{\text{опт}}$. При увеличении q величина издержек C приближается к $C_2 + C_3$.

8.3.2. Модель производственных запасов

В основной модели предполагалось, что товары на склад поступают мгновенно, например в течение одного дня. Рассмотрим случай, когда готовые товары поступают на склад непосредственно с производственной линии. Будем считать, что товары поступают непрерывно. Модель задачи в этом случае называют *моделью производственных поставок*. Пусть p — скорость поступающего на склад товара. Эта величина равна количеству товара, выпускаемого производственной линией за год. Остальные обозначения и предположения оставим те же, что и для основной модели управления запасами.

Определим оптимальный размер партии, минимизирующий общие затраты. График изменения модели производственных запасов имеет следующий вид (рис. 8.13).



Рис. 8.13

Общие издержки в течение года, как и для основной модели:

$$C = C_1 + C_2 + C_3, \quad C_1 = \frac{bg}{q}, \quad C_2 = sg.$$

Для получения среднего уровня запасов следует учесть, что

$RT = (p - g)t$ — максимальный уровень запасов;

$q = pt$ — количество товаров в одной производственной поставке.

Тогда средний уровень запасов составляет половину максимального и равен $\frac{(p - g)q}{2p}$. В итоге:

$$C = \frac{bg}{q} + sg + \frac{(p - g)qh}{2p}.$$

Решая уравнение $\frac{dC}{dq} = 0$, найдем оптимальный размер партии модели производственных поставок:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2pbg}{(p - g)h}}.$$

8.3.3. Модель запасов, включающая штрафы

Рассмотрим основную модель, допускающую возможность существования периодов дефицита, который покрывается при последующих поставках, и штрафов за несвоевременную поставку.

Пусть предприятие должно поставить q ед. товара в течение каждого промежутка времени продолжительностью L , за единицу времени поставляется g ед. товара ($q = Lg$).

Предположим, что в начале каждого периода L предприятие делает запас, равный k . Это означает, что в течение периода будет наблюдаться дефицит товара и некоторое время поставки не будут осуществляться. Невыполненные заявки будут накапливаться до максимальной величины $q - k$ и будут удовлетворены, как только поступит следующая партия товара в количестве q .

За то что предприятие доставляет товар позже необходимого срока, на предприятие налагается штраф, который зависит от того, насколько была задержана поставка. Такая модель целесообразна, поскольку иногда выгоднее заплатить штраф, чем расходовать дополнительные средства на хранение запасов, превышающих величину k .

Задача управления запасами состоит в том, чтобы выбрать такое значение k , которое ведет к минимизации всех затрат, включая затраты на хранение и штрафы.

График изменения запасов модели представлен на рис. 8.14.

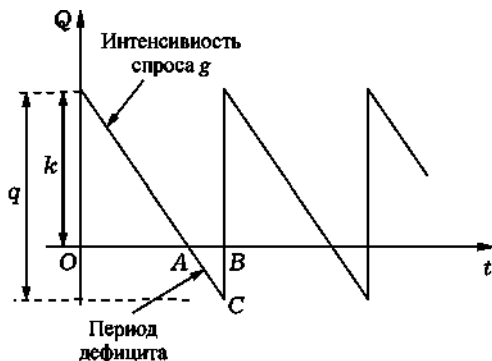


Рис. 8.14

Для определения оптимального значения k введем обозначения:

h — издержки хранения единицы товара за единицу времени;

p — затраты на штраф в расчете на единицу товара за один день отсрочки.

Найдем издержки одного цикла: $C = C_1 + C_2$, где C_1 — общие издержки содержания запасов; C_2 — общие затраты на штраф.

Так как товар находится на складе в течение периода OA (см. рис. 8.14), средний уровень запасов за этот период равен $k/2$. Если продолжительность периода OA равна k/g , то

$$C_1 = h \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{g} = \frac{hk^2}{2g}.$$

Поскольку штраф выплачивается в течение периода $AB = \frac{q-k}{g}$, общее число «товаро-дней», на которые налагается штраф, равно площади треугольника

ABC . Площадь составляет:

$$\frac{q-k}{g} \frac{q-k}{2},$$

откуда $C_2 = \frac{p(q-k)^2}{2g}$.

Окончательно получим:

$$C = \frac{hk^2}{2g} + \frac{p(q-k)^2}{2g}.$$

Найдем $\frac{dC}{dk}$ и, решив уравнение $\frac{dC}{dk} = 0$, получим оптимальное значение:

$$k_{\text{опт}} = \frac{pq}{h+p}.$$

Взяв $k_{\text{опт}}$ в качестве уровня запасов в начале каждого цикла при условии, что невыполненные заявки будут удовлетворены, сведем суммарные расходы C к минимуму:

$$C_{\min} = \frac{q^2 hp}{2g(h+p)}.$$

8.3.4. Применение моделей управления запасами в экономике

Решим задачи с применением основной модели управления запасами.

Пример 13. Для сборки изделия предприятию необходима одна комплектующая деталь, закупочная стоимость которой составляет 10 000 руб. Затраты на заказ детали составляют 5000 руб., затраты на хранение — 6500 руб. Потребность в таких деталях составляет 120 единиц в год с равномерной поставкой в течение года. Определить оптимальный объем поставок и размер партий.

Решение. По условию задачи $g = 120$ ед., $b = 5000$ руб., $s = 10000$ руб., $h = 6500$ руб. Общие издержки в течение года вычисляются по формуле

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{600\,000}{q} + 1\,200\,000 + \frac{6500q}{2}.$$

Вычислим производную C и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{600\,000}{q^2} + 3250 = 0.$$

Из полученного уравнения находим:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{184,6} \approx 14 \text{ (ед.)}, \quad n_{\text{опт}} = \frac{120}{q_{\text{опт}}} \approx 9, \quad t_{\text{опт}} = \frac{365}{n_{\text{опт}}} \approx 41 \text{ (дн.)}.$$

Таким образом, оптимальный размер партии составляет 14 деталей, число поставок 9, продолжительность цикла 140 дней.

Пример 14. Интенсивность равномерного спроса составляет 2000 телевизоров в год, организационные издержки для одной партии — 20 тыс. ден. ед. Цена единицы товара равна 1 тыс. ден. ед., а издержки содержания телевизоров — 0,1 тыс. ден. ед. за один телевизор в год. Найти оптимальный размер партии, число поставок и продолжительность цикла.

Решение. По условию задачи $g = 2000$, $b = 20\,000$, $s = 1000$, $h = 100$ ден. ед. Общие издержки в течение года вычисляются по формуле (тыс. руб.)

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{40\,000}{q} + 2000 + \frac{q}{20},$$

Вычислим производную C и приравняем к нулю:

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{40\,000}{q} + \frac{1}{20}.$$

Из полученного уравнения находим:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{800\,000} \approx 894 \text{ (ед.)}, \quad n_{\text{опт}} = \frac{2000}{q_{\text{опт}}} \approx 2,24, \quad t_{\text{опт}} = \frac{365}{n_{\text{опт}}} \approx 163 \text{ (дн.)}.$$

Таким образом, оптимальный размер партии составляет 894 телевизора, число поставок — 2,24, продолжительность цикла — 163 дня.

Рассмотрим задачу с применением модели производственных поставок.

Пример 15. Интенсивность равномерного спроса выпускаемых предприятием видеомэгнитофонов составляет 2000 шт. в год, организационные издержки — 20 тыс. ден. ед., цена видеомэгнитофона — 1 тыс. ден. ед., издержки хранения — 0,1 тыс. ден. ед. в расчете на один видеомэгнитофон в год. Запасы на складе пополняются со скоростью 4000 видеомэгнитофонов в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено q видеомэгнитофонов.

Найти размер партии, который минимизирует все затраты. Вычислить число поставок в течение года; время, в течение которого продолжается поставка; продолжительность цикла; максимальный уровень запасов и средний уровень запасов при условии, что размер поставки оптимален.

Решение. Данная модель задачи является моделью производственных поставок со следующими параметрами: $g = 2000$, $b = 20\,000$, $h = 100$, $s = 1000$, $p = 4000$. Нарисуем график изменения запасов (рис. 8.15).

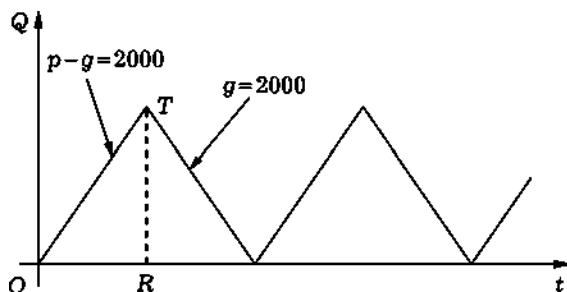


Рис. 8.15

Число партий в течение года

$$n = \frac{g}{q} = \frac{2000}{q}.$$

Продолжительность поставки

$$t = \frac{q}{p} = \frac{q}{4000}.$$

Продолжительность цикла

$$L = \frac{1}{n} = \frac{q}{g} = \frac{q}{2000}.$$

Максимальный уровень запасов

$$RT = (p - g)t = 2000 \cdot \frac{q}{4000} = \frac{q}{2}.$$

Средний уровень запасов

$$\frac{RT}{2} = \frac{q}{4}.$$

Уравнение издержек

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = bn + sg + \frac{qh}{4}.$$

Решив уравнение $\frac{dC}{dq} = 0$, получим:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 20 \cdot 2000}{2000 \cdot 0,1}} \approx 1265 \text{ (ед.)}.$$

Найдем оптимальные значения поставок, продолжительность поставки, продолжительность цикла:

$$n_{\text{опт}} = \frac{2000}{1265} \approx 1,6 \text{ (поставок)}; \quad t_{\text{опт}} = \frac{1265}{4000} \approx 115 \text{ (дн.)}; \quad L_{\text{опт}} = \frac{365}{1,6} \approx 228 \text{ (дн.)}.$$

Таким образом, за каждую поставку необходимо доставлять на склад 1265 видеомagneитофонов, оптимальное число поставок — 1,6, продолжительность поставки — 115 дней, продолжительность цикла — около 230 дней.

Упражнения

8.1. В течение 10 дней наблюдалось следующее изменение запасов:

- первоначальный запас равен нулю, в следующие двое суток товары поступали на склад непрерывно и равномерно по 500 шт. в день, расходование запасов не происходило;
- в следующие четыре дня спрос на имеющиеся в запасе товары был непрерывным и равномерным и равнялся 250 шт. в день, запасы не пополнялись;
- в следующие четыре дня потребность в товарах изменилась до 200 шт. в день, для удовлетворения спроса и пополнения запасов ежедневно на склад доставлялось 300 шт. (поставки на склад и со склада происходили равномерно и непрерывно).

Нарисуйте график изменения запасов для десятидневного периода, определите величину запасов на складе к концу периода. Вычислите средний уровень запасов для всего периода.

8.2. Предприятию по строительству судов требуется 20000 шт. заклепок в год, расходуемых с постоянной интенсивностью. Организационные издержки составляют 0,5 тыс. ден. ед. за партию, цена одной заклепки — 10 ден. ед. Издержки на хранение одной заклепки оценены в 12,5% ее стоимости. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальную продолжительность цикла и оптимальное число поставок за год.

8.3. Известно, что издержки выполнения заказа 2 ден. ед., количество товара, реализованного за год, — 1000 шт., закупочная цена единицы товара — 5 ден. ед., издержки хранения — 20% закупочной цены. Определить оптимальный размер заказа.

8.4. Система управления запасами некоторого товара подчиняется основной модели. Каждый год с постоянной интенсивностью поступает спрос 15000 ед. товара, издержки на организацию поставки составляют 10 ден. ед. на партию, цена единицы товара — 30 ден. ед., а издержки на ее хранение — 7,5 ден. ед. в год. Найти оптимальный размер партии, число поставок, продолжительность цикла.

8.5. Интенсивность равномерного спроса — 2000 ед. товара в год. Организационные издержки для одной партии — 20 тыс. ден. ед., цена единицы товара — 1 тыс. ден. ед., издержки содержания запаса — 100 ден. ед. за единицу товара в год. Найти оптимальный размер партии, предполагая, что система описывается основной моделью.

8.6. Предприниматель имеет стабильный месячный спрос на товар в количестве 50 ед. Товар он покупает у поставщика по цене 6 ден. ед. за штуку, причем издержки на оформление поставки и другие подготовительные операции составляют в каждом случае 10 ден. ед. Как часто предприниматель должен пополнять свой запас товаров, если затраты на хранение равны 20% цены товара?

8.7. Известно, что издержки выполнения заказа равны 10 ден. ед., годовой спрос на товар — 1470 т, оптимальный размер партии поставки — 35 т. Определить годовые затраты на выполнение заказа.

8.8. Интенсивность спроса в модели производственных поставок составляет четверть скорости производства, которая равна 20 000 ед. товара в год. Организационные издержки для одной партии равны 150 ден. ед., а издержки хранения единицы товара в течение года составляют 5 ден. ед. Определить оптимальный размер партии.

8.9. Система управления запасами описывается моделью производственных запасов. Спрос на товар составляет 1500 шт. в год, цена — 200 ден. ед., издержки товара в течение года — 20 ден. ед., организационные издержки — 1000 ден. ед. В течение года может быть произведено 4500 шт. товара при полной загрузке производственной линии. Нарисуйте график изменения запасов, вычислите оптимальный размер партии, продолжительность поставки, продолжительность цикла и средний уровень запасов.

Глава 9. ГЛОБАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

В этой главе приводятся основные модели *экономической динамики*, в которых независимой переменной является время t . Поскольку речь идет о глобальных моделях, рассматривается случай, когда основные переменные, входящие в модели, представляют собой агрегированные величины. Главное назначение таких моделей — прогноз экономических показателей при разных сценариях переменных моделей, на основе которого можно установить наиболее важные закономерности экономической динамики.

9.1. Общие модели экономики

Общие модели развития экономики являются аппаратом теоретического исследования. В качестве инструмента исследования в них используется аппарат дифференциальных уравнений и разностных уравнений.

9.1.1. Односекторная модель Леонтьева

В *односекторных моделях* экономика на длительном периоде времени $[0, T]$ характеризуется набором переменных X, Y, K, L, I и C — соответственно объем валовой продукции, объем продукции конечного потребления, капитал (объем производственных фондов), труд, объем инвестиций и непроизводственного потребления (без учета государственных расходов).

Общая формулировка модели. Для односекторной модели справедливо уравнение баланса

$$X(t) = aX(t) + Y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (9.1)$$

где $a \in [0, 1]$ — коэффициент прямых затрат. Это уравнение аналогично матричному уравнению баланса модели Леонтьева* для случая *многосекторной экономики*. Конечная продукция (в стоимостном выражении) расходуется на инвестиции и непроизводственное потребление:

$$Y(t) = I(t) + C(t). \quad (9.2)$$

В свою очередь инвестиции расходуются на увеличение производственных фондов ΔK на следующий отрезок времени и на их амортизацию с нормой μ (восстановление вследствие их выбывания)

$$I(t) = \Delta K(t) + \mu K(t), \quad \Delta K(t) = K(t+1) - K(t). \quad (9.3)$$

* См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 91.

Подставляя соотношения (9.2) и (9.3) в уравнение (9.1), получаем односекторную модель экономической динамики:

$$(1 - a)X(t) = \Delta K(t) + \mu K(t) + C(t), \quad t \in [0, T]. \quad (9.4)$$

В случае когда t принимает дискретные значения ($t = 0, 1, \dots, T$), уравнение (9.4) записывается в виде разностного уравнения

$$(1 - a)X_t = \Delta K_t + \mu K_t + C_t, \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (9.5)$$

Уравнение (9.5) связывает три переменные величины: X , K и C . Рассмотрим случай, когда весь объем инвестиций I полностью расходуется на прирост производственных фондов, т.е. $\mu = 0$ и из формулы (9.3) следует, что

$$I_t = \Delta K_t = q\Delta X_t, \quad (9.6)$$

где положительная величина q называется *капиталоемкостью* прироста объема валовой продукции. Подставляя это выражение в уравнение (9.5), получаем *односекторную динамическую модель Леонтьева*:

$$(1 - a)X_t = q\Delta X_t + C_t, \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (9.7)$$

Анализ модели Леонтьева. Развернув в формуле (9.7) разность $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$, получаем уравнение

$$qX_{t+1} - (1 - a + q)X_t = -C_t. \quad (9.8)$$

Это соотношение представляет собой обыкновенное разностное неоднородное линейное уравнение первого порядка относительно сеточной функции X_t , определенной на равномерной сетке с единичным шагом по времени

$$\omega_n = \{t = i; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Для качественного анализа модели Леонтьева положим входящие в уравнение (9.8) параметры a , q и $C_t = C^*$ постоянными величинами и найдем общее решение. Напомним, что общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Используя соответствующие процедуры^{*}, получаем формулу для общего решения:

$$X_t = C_1 \left(\frac{1-a}{q} + 1 \right)^t + \frac{C^*}{1-a}, \quad (9.9)$$

^{*}См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 442.

где C_1 — произвольная постоянная. Выразим C_1 через X_0 , для чего подставим в формулу (9.9) $t = 0$. Получаем, что

$$C_1 = X_0 - \frac{C^*}{1-a}. \quad (9.10)$$

Подстановка этого выражения в (9.9) приводит к окончательному виду решения односекторной модели Леонтьева с постоянными коэффициентами:

$$X_t = \left(X_0 - \frac{C^*}{1-a} \right) \left(\frac{1-a}{q} + 1 \right)^t + \frac{C^*}{1-a}. \quad (9.11)$$

Выделим особо *стационарное решение*, определяемое условием $X_t = \text{const}$ (в данном случае это частное решение неоднородного уравнения)

$$X_{st} = \frac{C^*}{1-a}, \quad (9.12)$$

оно показано на рис. 9.1 горизонтальной штриховой прямой.

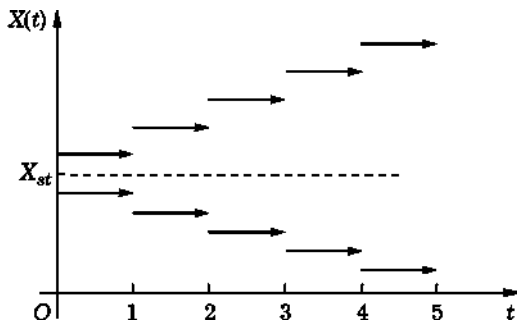


Рис. 9.1

Вид и свойства решения (9.11) существенно зависят от знака коэффициента (9.10). Здесь возможны два случая.

1. Выполнено условие

$$X_0 < \frac{C^*}{1-a}, \quad \text{или} \quad X_0 < X_{st}. \quad (9.13)$$

В этом случае, когда коэффициенты прямых затрат a и непроизводственное потребление C^* относительно велики, имеет место деградация экономики — валовой выпуск продукции снижается во времени (соответствующие горизонтальные отрезки смещаются вниз от прямой X_{st} , нижняя половина рис. 9.1). Для предотвращения развития такого сценария в реальности необходимо предпринять шаги по снижению указанных величин и улучшению качества применяемых технологий.

2. Выполнено условие $C_1 > 0$, т.е.

$$X_0 > \frac{C^*}{1-a}, \quad \text{или} \quad X_0 > X_{st}. \quad (9.14)$$

В этом случае агрегированный валовой выпуск растет во времени, удаляясь от значения X_{st} (серия отрезков в верхней половине рис. 9.1), что означает развитие экономики. Интенсивность этого развития существенно зависит от соотношения коэффициентов прямых затрат a и капиталоемкости прироста валового выпуска продукции q : снижение этих величин ведет к увеличению темпов роста одного наиболее важного показателя экономики — выпуска продукции. Кроме того, уменьшение величины a способствует выполнению условия (9.14) развития экономики.

Понятно, что уменьшение величин a и q напрямую зависит от применения ресурсосберегающих технологий. В противном случае использования затратных технологий прирост выпуска продукции будет незначительным. Это обстоятельство должно учитываться в государственных и региональных макроэкономических стратегиях развития.

9.1.2. Модель Солоу

Как и ранее, будем рассматривать односекторную модель с тем же набором агрегированных переменных.

Формулировка модели Солоу. Для непрерывного времени $t \in [0, T]$ аналогом разностного уравнения (9.5) является дифференциальное уравнение

$$(1-a)X = K' + \mu K + C, \quad (9.15)$$

где штрих означает производную по времени t . Перейдем к относительным (безразмерным) переменным

$$x = \frac{X}{L}, \quad k = \frac{K}{L}, \quad c = \frac{C}{L} \quad (9.16)$$

— производительности труда, фондовооруженности и удельному потреблению соответственно. Будем полагать, что

$$X = F(K, L) \quad (9.17)$$

— неоклассическая производственная функция с порядком однородности, равным единице, а L — экзогенная переменная с постоянным темпом роста:

$$\frac{L'}{L} = \gamma \quad (9.18)$$

(имеет место естественный прирост ресурса труда). Тогда в силу однородности функции выпуска (9.17)

$$x = \frac{X}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k).$$

Заметим, что функция $f(k)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $F(K, L)$:

$$f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f'(k) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad f''(k) < 0. \quad (9.19)$$

Постановка соотношений (9.16)–(9.18) в уравнение (9.15) приводит к уравнению относительно фондовооруженности k :

$$k' = (1 - a)f(k) - (\gamma + \mu)k - c. \quad (9.20)$$

Уравнение (9.20) представляет собой *открытую динамическую модель Солоу*, поскольку в нем содержится свободная переменная c (управляющая правая часть дифференциального уравнения). Уравнение (9.20) является обыкновенным дифференциальным неоднородным уравнением первого порядка. Если производственная функция $F(K, L)$ нелинейная (а, значит и $f(k)$ нелинейная), то уравнение (9.20) является нелинейным.

Замкнутая модель Солоу. Для того чтобы преобразовать открытую модель Солоу в замкнутую, исключим переменную c . Введем *норму накопления* $s = I/Y$ и *норму потребления* $u = C/Y$; тогда из равенства (9.2) следует, что $u + s = 1$. Отсюда с учетом уравнения баланса (9.1) получаем выражение для c :

$$c = \frac{C}{L} = \frac{uY}{L} = u(1 - a)x = (1 - s)(1 - a)f(k). \quad (9.21)$$

Подстановка равенства (9.21) в уравнение (9.20) приводит к обыкновенному дифференциальному однородному уравнению первого порядка для определения фондовооруженности k :

$$k' = s(1 - a)f(k) - (\gamma + \mu)k. \quad (9.22)$$

Здесь содержится управляющая переменная s в качестве мультипликатора. Уравнение (9.22) называется *замкнутой динамической моделью Солоу*.

Стационарная траектория развития экономики в модели Солоу. Уравнение (9.22) является автономным. Для его исследования найдем стационарное решение (стационарную точку) из условия

$$k(t) = \text{const}, \quad (9.23)$$

или $k' = 0$. Подстановка этого условия в уравнение (9.22) приводит к алгебраическому уравнению для определения k_{st} :

$$\varphi(k) = s(1-a)f(k) - (\gamma + \mu)k = 0, \quad (9.24)$$

которое в общем случае является нелинейным относительно k . Перепишем это уравнение в виде

$$s(1-a)f(k) = (\gamma + \mu)k. \quad (9.25)$$

Функция $f(k)$ удовлетворяет условиям неоклассической производственной функции. Значит, существует единственное ненулевое решение уравнения (9.25), так как функция левой части уравнения выходит из начала координат, выпукла вверх и растет, а правая часть этого уравнения линейна (рис. 9.2).

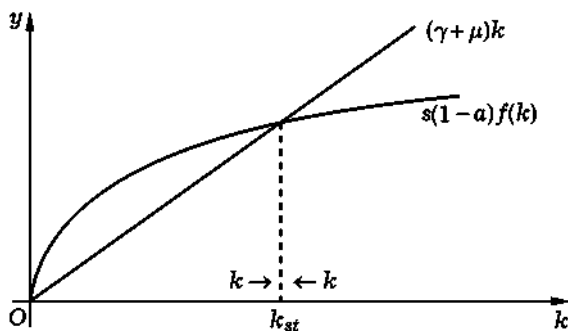


Рис. 9.2

Траектория развития, удовлетворяющая уравнению (9.22), называется *стационарной*, если выполнено условие (9.24), причем такая траектория, как было показано, существует и является единственной. Точку k_{st} , соответствующую ненулевому корню уравнения (9.24), также называют стационарной. Эта точка обладает свойством устойчивости, а именно: $k(t) \rightarrow k_{st}$ при $t \rightarrow \infty$. Действительно, при $k(t) < k_{st}$, как следует из рис. 9.2, функция $\varphi(k) > 0$, и тогда согласно уравнению (9.22) $k' > 0$, т.е. $k(t) \rightarrow k_{st}$ слева. При $k(t) > k_{st}$ функция $\varphi(k) < 0$, откуда следует, что $k' < 0$, т.е. $k(t) \rightarrow k_{st}$ справа (см. рис. 9.2).

Точка $k = 0$ является неустойчивой, поскольку при $0 < k < k_{st}$, как уже говорилось, $k(t) \rightarrow k_{st}$, т.е. имеет место «уход» от нулевого значения.

Рассмотрим производственную функцию Кобба — Дугласа; в этом случае имеем

$$f(k) = bk^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (9.26)$$

Подставляя эту формулу в уравнение (9.24), получаем выражение для точки стационарности k_{st}

$$k_{st} = \left(\frac{sb(1-a)}{\gamma + \mu} \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (9.27)$$

Поскольку стационарная точка $k_{st} > 0$ является устойчивой, соответствующая ей стационарная траектория также устойчива. Согласно соотношениям (9.16) и (9.17) переменные этой траектории записываются следующим образом:

$$\begin{cases} K(t) = k_{st}L(0)e^{\gamma t}, \\ X(t) = f(k_{st}L(0)e^{\gamma t}), \\ Y(t) = (1 - a)X(t), \\ I(t) = sY(t), \\ C(t) = (1 - s)Y(t). \end{cases} \quad (9.28)$$

Из приведенных формул видно, что все они имеют одинаковый темп роста γ .

Если характеризующие экономику показатели обладают одинаковым постоянным темпом роста, то говорят, что у нее *сбалансированный рост*. Оказывается, верно и обратное: траектория сбалансированного роста является стационарной.

В реальных условиях, когда $k(0) \neq k_{st}$, решение уравнения (9.22) не определяет стационарную траекторию. Однако поскольку для любого $k(0) = k_0 > 0$ $k(t) \rightarrow k_{st}$ при $t \rightarrow \infty$, то при достаточно больших значениях времени t траектория роста в модели Солоу близка к траектории сбалансированного роста независимо от начального значения k . Это означает, что режим сбалансированного роста и стационарной траектории можно использовать в качестве достаточно хорошего приближения для расчетов экономических показателей независимо от величины k_0 .

Отметим, что сходимость $k(t)$ к k_{st} для случая показателя $\alpha = 1/2$ в производственной функции (9.26) была установлена путем непосредственного интегрирования уравнения (9.22): все интегральные кривые имели горизонтальную асимптоту $k(t) = k_{st}$.

9.1.3. Оптимальная постоянная норма накопления

Золотое правило. Из уравнения (9.25) и рис. 9.2 видно, что при повышении нормы накопления s график функции инвестиций будет располагаться выше и пересечет прямую $(\gamma + \mu)k$ правее. Это означает, что устойчивое значение k_{st} возрастает, а следовательно, увеличивается и уровень устойчивого выпуска $y = f(k_{st})$. Каждому уровню нормы накопления соответствует определенная устойчивая траектория. Здесь возникает интересная задача о нахождении оптимальной нормы накопления.

Оптимальная норма накопления должна определять оптимальный объем капитала для максимизации удельного потребления. Это условие называется *золотым правилом*. Соответствующие ему величины называются: фондовооруженность k_{st}^* — *фондовооруженностью по золотому правилу*, норма

накопления s^* — *нормой накопления по золотому правилу*. Ниже будет выведена формула «золотого правила».

Удельное потребление c , как следует из формулы (9.21), определяет разность между стоимостью конечной продукции и инвестициями. Для стационарной траектории (или, что то же самое, для соблюдения условия (9.25)) эта разность имеет вид

$$c = (1 - a)f(k) - (\mu + \gamma)k. \quad (9.29)$$

Указанная величина согласно золотому правилу должна быть максимальной для всех стационарных траекторий. Из условия экстремума $c' = 0$ получаем уравнение для определения c^* :

$$(1 - a)f'(k) = \mu + \gamma. \quad (9.30)$$

На рис. 9.3 приведена поясняющая схема на координатной плоскости «стационарная фондовооруженность — доход (инвестиции)». Уравнение (9.29) означает, что найдется такая точка k^* , в которой касательная к графику функции дохода $(1 - a)f(k)$ будет параллельна прямой инвестиций $(\mu + \gamma)k$, причем значение удельного потребления c^* в этой точке будет максимальным.

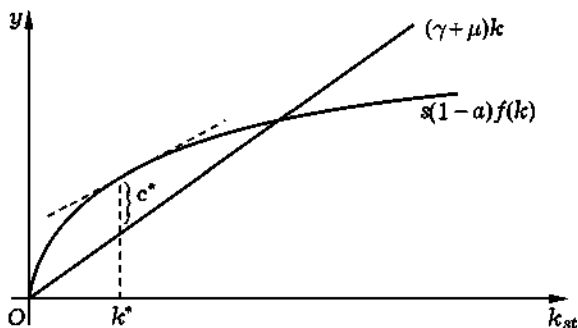


Рис. 9.3

Наклон прямой $(\mu + \gamma)k$ зависит от темпа роста γ ресурса труда L и нормы амортизации μ капитала K . Если они относительно невелики, то прямая $(\mu + \gamma)k$ становится более пологой и удельное потребление c^* возрастает. Статистические данные свидетельствуют, что в странах с быстрым ростом удельного потребления уровень душевого потребления, как правило, низок.

Задача нахождения оптимальной нормы накопления. Поставим задачу следующим образом: найти оптимальную норму накопления для стационарной траектории в модели Солоу при условии максимума удельного потребления (9.21). Математическая модель представляет собой задачу о поиске условного экстремума:

$$c = (1 - s)(1 - a)f(k) \rightarrow \max \quad (9.31)$$

при условии связи

$$s(1-a)f(k) - (\gamma + \mu)k = 0. \quad (9.32)$$

Напомним, что s — управляющая переменная ($0 < s < 1$). Заметим, что мы для краткости опускаем индекс стационарности у символа k здесь и далее, поскольку полагаем, что k удовлетворяет соотношению стационарности (9.32).

Составим функцию Лагранжа L при наличии одной связи:

$$L(s, k, \lambda) = (1-s)(1-a)f(k) + \lambda[s(1-a)f(k) - (\gamma + \mu)k]. \quad (9.33)$$

Поскольку это функция трех переменных, необходимые условия ее экстремума имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial s} = (1-a)f(k)(\lambda - 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial k} = (1-s)(1-a)f'(k) + \lambda[s(1-a)f'(k) - (\gamma + \mu)k] = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = s(1-a)f(k) - (\gamma + \mu)k = 0. \end{cases} \quad (9.34)$$

Поскольку $f(k) > 0$, из первого уравнения этой системы следует, что $\lambda = 1$. Тогда из второго уравнения получаем:

$$(1-a)f'(k) = \gamma + \mu. \quad (9.35)$$

Из второго и третьего условий (9.19) следует, что левая часть этого уравнения убывает, меняясь от положительной величины $(1-a)f'(0)$ до нуля, тогда как правая часть уравнения постоянна. Значит, существует единственное решение уравнения (9.35) $k^* > 0$. Подстановка найденного значения k^* в уравнение связи (9.32) с учетом (9.35) приводит к выражению для оптимальной нормы накопления s^* :

$$s^* = \frac{\mu + \gamma}{1-a} \frac{k^*}{f(k^*)} = \frac{k^*}{f(k^*)} f'(k^*). \quad (9.36)$$

Выражение (9.36) удобно использовать в другой форме

$$s^* = E(f(k^*)), \quad (9.37)$$

где $E(f(k^*))$ — эластичность производственной функции $f(k)$ в стационарной точке k^* . Поскольку для выпуклой вверх функции эластичность $0 < E(k) < 1$, то это справедливо и для оптимальной нормы накопления

$$0 < s^* < 1. \quad (9.38)$$

Найденное значение k^* соответствует максимуму удельного потребления s , так как в этой точке в силу последнего условия (9.19) вторая производная

функции c отрицательна:

$$c'' = (1 - s^*)(1 - a)f''(k^*) < 0.$$

Таким образом, из системы уравнений (9.34) найдено оптимальное решение задачи — получены оптимальные значения стационарной фондовооруженности k^* и нормы накопления s^* , при которых достигается максимум удельного потребления. Условие (9.37) называется «золотым правилом» накопления.

Умножая равенство (9.36) на $Lf(k^*)$, после перехода к переменным K и L получим:

$$s^*F(K^*, L) = \frac{\partial F(K^*, L)}{\partial K} K^*. \quad (9.39)$$

Это равенство означает, что инвестиции в производственные фонды согласно золотому правилу накопления равны доходу, получаемому от капитала.

Из формулы (9.36) видно, что оптимальное значение s^* растет вместе со значением k^* . Следовательно, если первоначальная величина фондовооруженности k_{st} меньше ее оптимального значения k^* , то имеет смысл увеличить норму накопления s до величины s^* согласно золотому правилу (9.37); тогда экономика постепенно выйдет на максимальный уровень потребления c^* . Если же первоначальная величина $k_{st} > k^*$, то следует снизить норму накопления до величины s^* , и тогда экономика также постепенно выйдет на уровень, соответствующий золотому правилу.

Рассмотрим реализацию золотого правила накопления для функции Кобба — Дугласа (9.26). Поскольку эластичность фондовооружения в этом случае постоянна и равна α , оптимальная норма накопления s^* согласно формуле (9.37) также равна α . Чем выше доля капитала K в производственной функции, тем больше значение эластичности α , значит, возрастает и s^* . Например, при $\alpha = 0,5$ оптимальная норма накопления согласно золотому правилу должна составить 50% объема Y продукции конечного потребления.

Затем из уравнения связи получаем уравнение для определения оптимального значения стационарной фондовооруженности k^* :

$$k^* = \frac{s^*(1-a)}{\mu + \gamma} f(k^*) = \alpha b \frac{1-a}{\mu + \gamma} (k^*)^\alpha.$$

Из этого уравнения имеем выражение для k^* :

$$k^* = \left(\frac{\alpha b(1-a)}{\mu + \gamma} \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (9.40)$$

Полученное выражение (9.40) отличается от выражения для стационарной фондовооруженности (9.27) лишь тем, что в основание степени в формулу для оптимальной стационарной фондовооруженности вместо нормы накопления s входит ее оптимальное значение α .

9.2. Моделирование эколого-экономических систем

Связь социального и экономического впервые стала изучаться в рамках классической политэкономии Кэне — Адама Смитта — Рикардо*. Однако в конце XIX в. после «революции Вальраса» и появления «неоклассической» политэкономии был выдвинут принцип «чистой экономики» как науки. Особое внимание уделялось вопросам рынка, эволюции цен, движения капитала и пр. До сих пор вокруг них сосредоточены усилия исследователей; эти проблемы служат основой для разработки математических моделей и новых математических методов. Кроме того, уже создан разнообразный и эффективный инструментарий, позволяющий решать многочисленные и важные задачи.

В 70-х гг. XX столетия становится очевидным, что подобные подходы не могут обеспечить количественный анализ перспектив экономического развития и оценку альтернативных вариантов целенаправленных международных действий, а также решение сложных проблем взаимодействия человечества и окружающей среды. Начало новым подходам положил Дж. Форрестер; в его фундаментальной работе «Мировая динамика» (М.: Наука, 1978) для описания глобального экологического процесса впервые оказались «завязанными» в одну математическую модель процессы развития экономики, демографии и загрязнения окружающей среды. Новый аспект был развит в работах Д. Медоуза, Н.Н. Моисеева и других исследователей. Важным результатом этой деятельности явилось осознание, что существуют глобальные проблемы кризисного характера, в которых экономика неотделима от экологии. В условиях глобализации мировой экономики обеспечение жизнедеятельности мирового сообщества в планетарных масштабах становится главной задачей, носящей всеобщий характер. Именно это обстоятельство обуславливает новый концептуальный подход как переход от понятия экономической системы к понятию *эколого-экономической системы*. Естественно, что здесь возникают новые специфические задачи и модели.

9.2.1. Эколого-экономические системы

Основные аспекты взаимодействия человека и окружающей среды. В многовековом процессе эволюции человека нагрузка на биосферу как результат его производственной деятельности неуклонно возрастала. Еще на заре цивилизации увеличение масштабов деятельности людей приводило к необратимым изменениям в окружающей среде. Так, в Китае огромные площади рисовых полей совершенно изменили природные ландшафты, вытеснили существовавшую

*Кене Франсуа (1694–1774) — французский экономист. Смитт Адам (1723–1790) — английский экономист и финансист. Рикардо Давид (1772–1823) — английский экономист.

ранее фауну и флору и привели к новым климатическим условиям на больших территориях. Известный российский ученый академик В.И. Вернадский в начале 30-х гг. XX в. ввел специальный термин «ноосфера», обозначающий среду обитания сообщества людей, переделанную под их нужды, и существенно отличающуюся от природных условий. По сути к ноосфере можно отнести все масштабные изменения в природной обстановке, обусловленные производственной активностью человечества: мегаполисы, сельское хозяйство, добычу природных ресурсов, техногенное воздействие на биосферу при освоении новых территорий.

Ресурсная экосистема поддерживает функционирование биосферы и цивилизации на нашей планете. Все ресурсы экосистемы можно условно разделить на *возобновимые* и *невозобновимые*. Различие между ними состоит в сроках восстановления: если для первой группы ресурсов они сравнительно невелики (несколько десятков лет), то для второй группы — превышает 1000 лет.

Масштабы деятельности людей стали уже планетарными, что требует создания нового класса моделей развития с целью выработки рекомендаций по координации экономической активности государств для сохранения условий жизни на нашей планете, а следовательно, и успешного развития мировой экономики. Укажем основные аспекты проблемы.

1. Энергетический аспект. Вместе с ростом производительности труда, совершенствованием технологий и повышением квалификации работников технологический уклад прошлых лет характеризовался все возрастающей энергоемкостью производства. В прошлые века это было оправданно, поскольку происходил переход от малопродуктивной системы производства к высокопродуктивной системе. Основной вклад в развитие производительности труда дала энергетика, именно она развивалась опережающими темпами. Особенно наглядно это видно на примере сельского хозяйства; в середине XX в. средняя урожайность зерновых в развитых странах возросла в три раза в результате роста энергозатрат на производство одной тонны зерна почти на два порядка. Однако в последнее время появились новые формы деятельности и технологии, требующие значительно меньших затрат энергии: микроэлектроника, биотехнологии, робототехника. Происходит совершенствование современных технологий преимущественно в уменьшении энергозатрат. Эта тенденция проявляется прежде всего в том, что энергоемкие производства перемещаются из экономически развитых стран в развивающиеся страны, иными словами, энергоемкость становится одной из важнейших характеристик производства.

2. Проблема замкнутых технологий. Производственную деятельность людей можно рассматривать как глобальный технологический процесс обеспечения цивилизации всем необходимым. В последние столетия эта технология стала принципиально незамкнутой: она не может существовать без использования невозобновимых запасов земных недр. Имеет место не только истощение

ископаемых природных ресурсов, но и нехватка возобновимых ресурсов, например пресной воды. Именно поэтому во всех странах с развитой экономикой предпринимаются значительные усилия для создания и использования замкнутых технологий, использующих возобновимые ресурсы, в том числе энергетические.

3. Аспект загрязнений. Из экономически развитых стран идет выталкивание в развивающиеся страны не только энергоемких технологий, но и производств, сильно загрязняющих биосферу. К ним относятся, например, добыча невозобновимых природных ресурсов, черная металлургия, некоторые виды химического производства. Именно с этим связан быстрый рост экспорта сырья и металла из развивающихся стран. Кроме того, наблюдается тенденция выталкивания в развивающиеся страны и отходов высокотехнологичных производств (например, радиоактивных отходов) передовых стран. Однако этот процесс представляется опасным прежде всего тем, что он увеличивает разрыв между передовыми и развивающимися странами не только в технологическом плане, но и в плане уровня жизни населения и увеличения глобальной опасности разрушения биосферы.

4. Организационный аспект. Развитие технологий и научно-технический прогресс требуют непрерывного совершенствования организационных структур производственной деятельности, в том числе на международном уровне. Эти проблемы затрагивают взаимодействие человека и биосферы в глобальном плане. Возникает необходимость учета социальных и экологических факторов и долгосрочных последствий принимаемых решений. Модели, позволяющие описать эти процессы, фактически еще не созданы.

Природоемкость. Важным показателем эффективности *природно-продуктовой системы* является *природоемкость*, которая характеризует тип и уровень эколого-экономического развития. На макроуровне показатель природоемкости определяется как затраты используемых природных ресурсов (P) на единицу ВВП:

$$E_N = \frac{P}{\text{ВВП}}. \quad (9.41)$$

Второй тип показателей эффективности названной системы определяется затратами природного ресурса R_N на единицу конечной продукции объема V , произведенной на основе этого ресурса (на продуктовом или отраслевом уровне):

$$e = \frac{R_N}{V}. \quad (9.42)$$

В качестве такого показателя может служить *энергоемкость* (энергетические затраты на единицу конечной продукции). Существует важный макроэкономический показатель энергоемкости — петаджоуль/млрд. долл. ВВП (1 петаджоуль = 10^{15} джоулей). По этому показателю видна технологическая

отсталость России на сегодняшний день: она «опережает» Бразилию, Южную Корею, Англию, Германию, США и Японию соответственно в 3,2; 4,1; 6; 6,8; 4 и 11 раз.

В статистике широко распространен показатель, обратный коэффициенту природоемкости — показатель *природной ресурсоотдачи*

$$\sigma = \frac{V}{R_N}. \quad (9.43)$$

В сельском хозяйстве его аналогом является урожайность — производство продукции на единицу земельной площади.

Для *экстенсивного* типа развития экономики характерна высокая природоемкость (низкая природная ресурсоотдача). При длительном сохранении технологического уровня это чревато постепенным истощением ресурсов, что еще более обостряет экономическую ситуацию. Для *интенсивного* типа развития экономики характерно снижение природоемкости (повышение природной ресурсоотдачи). В условиях реформ структурной и инвестиционной политики важнейшей задачей государства является минимизация природоемкости или максимизация природной ресурсоотдачи:

$$e \rightarrow \min \quad \text{или} \quad \sigma \rightarrow \max. \quad (9.44)$$

Устойчивое развитие. Вопрос об устойчивом развитии был поставлен на международном уровне в докладе Международной комиссии ООН по окружающей среде и развитию в 1987 г. Термин *устойчивое развитие* подразумевает следующие закономерности эволюции цивилизации:

- удовлетворение потребностей настоящего времени, не ставящее под угрозу способность будущих поколений удовлетворять свои потребности;

- учет социальных и экологических факторов;

- учет долгосрочных последствий принимаемых решений.

В экономическом плане это означает, что при устойчивом развитии будут соблюдаться условия цивилизованного отношения между настоящим и будущим:

- на последующие поколения не возлагаются дополнительные затраты;

- отрицательные внешние эффекты перехода от поколения к поколению сводятся к минимуму;

- обеспечивается простое и/или расширенное воспроизводство производственного потенциала на перспективу;

- обеспечивается жизнь человечества на проценты с природного капитала.

Уменьшение природоемкости является необходимым условием перехода к устойчивому развитию как для отдельных стран, так и для мировой экономики в целом. Движение по траектории устойчивого развития подразумевает прежде всего снижение потребления природных ресурсов за счет использования новых и совершенствования имеющихся производственных технологий.

Целевыми ориентирами устойчивого развития являются качество жизни, уровень экономического развития, экологическая стабильность.

Естественным образом возникает вопрос о мерах по обеспечению устойчивого развития. Соответственно развилась концепция *критического природного капитала* как необходимых для жизни природных благ, которые невозможно заменить искусственным путем. К ним относятся: ландшафты, редкие виды флоры и фауны, озоновый слой в верхней части земной атмосферы, глобальный климат и т.д. Этот критический природный капитал необходимо сохранять при любых сценариях экономического развития. Остальная часть природного капитала может быть заменена искусственным путем — прежде всего имеются в виду возобновимые и некоторая часть невозобновимых природных ресурсов (например, природные энергоресурсы могут быть заменены на солнечную энергию, одного процента которой с избытком бы хватило на обеспечение современной потребности человечества).

С учетом критического природного капитала N^* устойчивое развитие может быть дополнено ограничением на исчерпание во времени этой величины. Для не убывающей во времени производственной функции, аргументами которой являются агрегированные переменные труда L , капитала K и природного ресурса N ,

$$F_t(K, L, N) \leq F_{t+1}(K, L, N), \quad (9.45)$$

необходимо соблюдение условия неубывания во времени величины N^* :

$$N_t^* \leq N_{t+1}^*, \quad (9.46)$$

а также условие частичной замены природного капитала N на искусственный N^s (или невозобновимого ресурса на возобновимый ресурс):

$$N_t = N_t^* + N_t^s. \quad (9.47)$$

9.2.2. Балансовые модели

Основные виды загрязнений. Можно сказать, что отходы производства — это загрязнение окружающей среды при незамкнутом производственном цикле. Для XX в. были характерны еще и ядерные отходы с большим жизненным циклом. В природный круговорот оказались активно включены инородные для природы компоненты — продукты антропогена, что приводит к значительным и подчас необратимым изменениям в биосфере. Число видов этих загрязнений велико, мы укажем основные из них.

1. Загрязнение атмосферы хлорфторуглеродами, выбросами углекислого газа, сернистыми и азотнокислыми соединениями. Поднимаясь в верхние слои атмосферы Земли, они вызывают процессы, отрицательно воздействующие на естественные природные циклы биосферы. Наиболее опасным следует

признать разрушение озонового слоя в стратосфере, являющегося природным экраном от губительного «жесткого» излучения Солнца в диапазоне R -спектра.

2. Разработка и использование природных ресурсов переводит потребляемые ресурсы в потраченные (истощенные), которые становятся отходами производства. Наиболее массовые из них — это отходы черной и цветной металлургии и зола ТЭЦ (соответственно 45,2 и 39,2% общего объема отходов в России). Крупные по масштабам загрязнения имеют место при разработке и использовании углеводородов.

Отходы сельского хозяйства представляют собой в основном биозагрязнения и загрязнения от использования химикатов.

3. Сравнительно небольшие по объему, но особо опасные по воздействию на окружающую среду отходы связаны с употреблением химических технологий: выбросы тяжелых металлов, смесей, растворов, излучений.

Указанные в п. 2 и 3 загрязнения воздействуют на почвенный слой и источники воды (в том числе подземные), оказывая при больших масштабах губительное воздействие на окружающую среду.

Модель оптимизации выпуска. Рассмотрим задачу оптимизации производства при одновременном выполнении условий сосуществования с окружающей средой (соблюдении определенных экологических норм).

Пусть $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — целевая функция выпуска, характеризующая производство, в котором используются n ресурсов. Будем полагать, что имеется m видов загрязнения от данного производства, которые заданы матрицей интенсивностей

$$C_p = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad (9.48)$$

где $c_{ij} \geq 0$ — количество i -го загрязнения, продуцируемое при использовании единицы j -го ресурса. Тогда вектор загрязнений $\bar{z}$ определяется формулой

$$\bar{z}^T = C_p \bar{x}^T, \quad \text{или} \quad z_k = \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j, \quad k = \overline{1, m}, \quad (9.49)$$

где $\bar{x}$ — вектор-строка используемых ресурсов. Введем матрицу A коэффициентов ограничений на ресурсы и вектор ограничений $\bar{b}$, определяемый возможностями производства, а также вектор $\bar{z}^*$ экологических нормативов — допустимых (предельных) отходов по каждому виду загрязнения. Эти нормативы обычно устанавливаются по существующим нормам ПДК (предельно допустимых концентраций) загрязнений.

Тогда задача оптимизации выпуска продукции формулируется следующим образом:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\bar{x}) \rightarrow \max \quad (9.50)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} A\bar{x}^T \leq \bar{b}^T; \\ \bar{z} \leq \bar{z}^*; \\ \bar{z} \geq \bar{0}, \quad \bar{x} \geq \bar{0}. \end{cases} \quad (9.51)$$

Приведенная постановка задачи оптимизации производства при условии соблюдения экологических норм соответствует устойчивому развитию. В отличие от традиционных оптимизационных моделей допустимое множество которых формируется только вторым и третьим соотношениями (9.51), эта модель включает еще и ограничение на «чистоту» производства, специально выделенное в отдельные соотношения. Для соблюдения последнего условия в (9.51), которое в развернутой форме согласно (9.49) имеет вид ограничения по каждому типу загрязнения:

$$\sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \leq z_k^*, \quad k = \overline{1, m}, \quad (9.52)$$

необходимо либо делать выбор более совершенных технологий, либо заменять «грязные» ресурсы более чистыми. В противном случае из-за ограничений (9.52) допустимые объемы используемых ресурсов $\bar{x}$ могут оказаться столь незначительными, что нельзя будет обеспечить экономически приемлемого объема выпуска продукции.

На рис. 9.4 проиллюстрировано сказанное. Ограничения (9.52) показаны затененной областью; они, вообще говоря, сокращают допустимое множество технологических решений, на котором ищется оптимальное решение. Вид и размеры этой области зависят от коэффициентов c_{ij} , т.е. от технологии использования ресурсов. При «грязных» технологиях сужение области

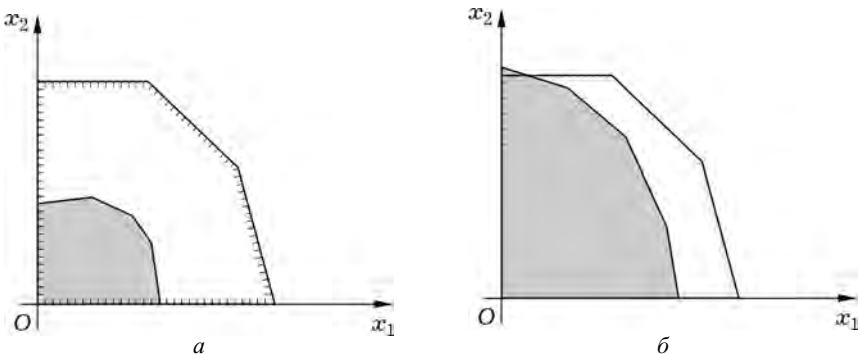


Рис. 9.4

допустимых решений довольно значительно (рис. 9.4, *а*); применение сберегающих «чистых» технологий незначительно сужает область допустимых решений (рис. 9.4, *б*).

Сформулированная выше модель (9.50)–(9.52) является частным случаем общей задачи ЛП.

Модель (9.50)–(9.52) относится скорее к области макроэкономики, когда выпуск можно отождествить с ВВП страны или с валовой продукцией региона. Тогда условие (9.52) является управлением технологической политики (быть может, законодательным). Для микроэкономики на уровне отдельного производства эта модель не будет работать, поскольку производитель заинтересован прежде всего в достижении наибольшего выпуска продукции (9.50), а вопрос о соблюдении экологических норм (9.52) остается для него второстепенным хотя бы потому, что это требование никак не отражено в целевой функции.

Модель оптимизации дохода. Для использования экологического фактора в микроэкономике необходимо перейти к стоимостным выражениям в целевой функции и оплате превышения норм загрязнения. Пусть p — агрегированная цена производимой продукции, а компоненты вектора

$$\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m) \quad (9.53)$$

означают расходы на устранение загрязнений в случае превышения соответствующих норм (при нарушении третьего условия в (9.51)). Тогда функция дохода P от выпуска продукции $F(\bar{x})$ имеет вид

$$P = pF(\bar{x}) - \bar{w}\bar{\delta}, \quad (9.54)$$

где $\bar{\delta}$ — вектор «включений» санкций

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & z_j \leq z_j^*; \\ 1, & z_j > z_j^*, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.55)$$

$\bar{z}$ — вектор загрязнений, определяемый формулами (9.48) и (9.49), а z_j^* — компоненты вектора предельных загрязнений

$$\bar{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*). \quad (9.56)$$

Для простоты будем полагать, что обычные расходы на экологию уже включены в плату за природопользование, т.е. второй член в функции дохода со знаком минус — это оплата сверхнормативной нагрузки на окружающую среду. В этом плане уравнение (9.54) можно рассматривать как производственную функцию, аргументами которой являются ресурсы $\bar{x}$, загрязнения $\bar{z}$, предельно допустимые нормы $\bar{z}^*$ и оплата за нарушение экологических норм $\bar{w}$.

Модель оптимизации дохода от выпуска продукции с использованием вектора ресурсов $\bar{x}$ при технологии, характеризуемой производственной функцией F ,

определяется следующим образом: найти максимум функции P (9.54) при пер-вом ограничении из (9.51) и неотрицательных векторах $\bar{x}$ и $\bar{z}$.

В этой модели учитываются как возможности самого производства (заданы матрица A коэффициентов ограничений и вектор $\bar{b}$ ограничений на ресурсы), так и нормативы технологического воздействия на окружающую среду и расходы на ликвидацию последствий их превышения (векторы $\bar{w}$ и $\bar{z}^*$). Непосредственно из данной модели видно, что при «жестком» экологическом законодательстве производитель вынужден будет применять более совершенные технологии с целью снижения удельных техногенных отходов — коэффициентов матрицы C_p в (9.48). Именно так обстоит дело в странах с развитой экономикой.

Модель может быть использована для целей микроэкономики на уровне предприятия, промышленного комплекса, отраслевого выпуска продукции.

Балансовая модель с увеличением расходов ресурсов. Как правило, матрицы межотраслевого баланса обладают значительным запасом продуктивности. В ряде случаев для минимизации техногенных отходов приходится тратить больше ресурсов на единицу выпуска продукции, т.е. увеличивать внутриотраслевое потребление (например, строительство очистных сооружений, технологическая обработка отходов и т.д.). Это «утяжеляет» коэффициенты матрицы прямых затрат A , что в свою очередь приводит к уменьшению ее запаса продуктивности.

Пусть A — матрица межотраслевого баланса, $\bar{x}$ — вектор валовых выпусков отраслей, $\bar{y}$ — вектор конечного потребления. Тогда уравнение межотраслевого баланса имеет вид

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}. \quad (9.57)$$

Предположим, что для экологических и природоохранных мероприятий нужно увеличить внутриотраслевое потребление, т.е. новая матрица прямых затрат представляет собой сумму прежней матрицы A и некоторой добавки. Соответственно изменятся и векторы валового выпуска и конечного потребления:

$$\tilde{A} = A + \Delta A, \quad \bar{x}^* = \bar{x} + \Delta \bar{x}, \quad \bar{y}^* = \bar{y} + \Delta \bar{y}. \quad (9.58)$$

Для измененной матрицы A уравнение межотраслевого баланса (9.57) имеет вид

$$\bar{x} + \Delta \bar{x} = (A + \Delta A)(\bar{x} + \Delta \bar{x}) + \bar{y} + \Delta \bar{y}.$$

После приведения подобных с учетом равенства (9.57) получаем уравнение для изменения вектора валовых выпусков

$$(E - \tilde{A})\Delta \bar{x} = \Delta A\bar{x} + \Delta \bar{y}. \quad (9.59)$$

Рассмотрим частный случай изменения матрицы A , когда все ее элементы увеличиваются в $1 + \alpha$ раз, причем α удовлетворяет условию запаса продуктивности A . Иными словами, $\Delta A = \alpha A$, и тогда уравнение (9.59) с учетом

равенства (9.57) принимает вид

$$[E - (1 + \alpha)A] \Delta \bar{x} = \alpha(\bar{x} - \bar{y}) + \Delta \bar{y}. \quad (9.60)$$

Это уравнение связывает изменения валовых выпусков с изменениями расхода ресурсов и вектора конечного потребления. Из него получаем выражение для $\Delta \bar{x}$:

$$\Delta \bar{x} = [E - (1 + \alpha)A]^{-1} [\alpha(\bar{x} - \bar{y}) + \Delta \bar{y}]. \quad (9.61)$$

Проанализируем выражение (9.61). В силу второго критерия продуктивности матрицы $(1 + \alpha)A$ матрица $[E - (1 + \alpha)A]^{-1}$ является положительной, поэтому даже в случае нулевого прироста вектора конечного потребления валовой выпуск продукции с необходимостью увеличивается, поскольку $\bar{x} - \bar{y} > 0$.

Пример 1. Найти увеличение валового выпуска для случая двух отраслей с матрицей прямых затрат и неизменным вектором конечного потребления

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix},$$

если для соблюдения нормативов загрязняющих отходов внутриотраслевое потребление необходимо увеличить на 10% в каждой отрасли.

Решение. Сначала из уравнения (9.57) рассчитаем исходный вектор валовых выпусков:

$$\begin{aligned} \bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y} &= \begin{pmatrix} 0,7 & -0,5 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{0,29} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,5 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65,5 \\ 51,7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее согласно формуле (9.61) составим все необходимые для вычислений матрицы и векторы:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)A &= 1,1 \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,55 \\ 0,44 & 0,33 \end{pmatrix}, \\ \alpha(\bar{x} - \bar{y}) &= 0,1 \begin{pmatrix} 45,5 \\ 41,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,55 \\ 4,17 \end{pmatrix}, \\ E - (1 + \alpha)A &= \begin{pmatrix} 0,67 & -0,55 \\ -0,44 & 0,67 \end{pmatrix}, \\ [E - (1 + \alpha)A]^{-1} &= \frac{1}{0,2069} \begin{pmatrix} 0,67 & 0,55 \\ 0,44 & 0,67 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Наконец, при $\Delta \bar{y} = \bar{0}$ получаем решение уравнения (9.61):

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{0,2069} \begin{pmatrix} 0,67 & 0,55 \\ 0,44 & 0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,55 \\ 4,17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25,8 \\ 23,2 \end{pmatrix}.$$

Сравнение полученного результата с исходным вектором валового выпуска показывает, что даже при нулевом росте конечного потребления для увеличения внутриотраслевого потребления с целью устранения загрязнений необходимо увеличить валовые выпуски на 39,4 и 44,8% в первой и второй отраслях соответственно. Такой прирост является экстенсивной мерой и почти нереален, более приемлемым представляется переход к новым сберегающим технологиям.

Балансовая модель равновесных цен. Для моделирования эколого-экономических систем в макро- и микроэкономике используются и балансовые модели многоотраслевой экономики. Согласно некоторым из них необходимо увеличить валовой выпуск с тем, чтобы прирост выпуска направить на устранение загрязнений. Однако при такой постановке задачи предполагается, что используемые технологии остаются на прежнем уровне, что отражено в неизменности матрицы затрат A .

Воспользуемся стоимостной моделью равновесных цен. В матричной форме она имеет вид:

$$\bar{p} = A^T \bar{p} + \bar{w}, \quad (9.62)$$

где $\bar{p}$ и $\bar{w}$ — соответственно вектор цен на продукцию отраслей и вектор добавленной стоимости. Средства, направляемые на устранение загрязнений, увеличат компоненты вектора добавленной стоимости $\bar{w}$. Пусть вектор $\bar{w}_{\text{ec}} > \bar{0}$ — экологическая «нагрузка» в виде налогов, штрафных санкций, расходов на инженерно-профилактические меры и т.д. Тогда вектор цен на продукцию отраслей при затратах на экологию определяется из уравнения

$$\bar{p}^* = (E - A^T)^{-1}(\bar{w} + \bar{w}_{\text{ec}}). \quad (9.63)$$

Таким образом, изменение цен на продукцию отраслей с учетом соотношения (9.62) составит

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}^* - \bar{p} = (E - A^T)^{-1} \bar{w}_{\text{ec}}. \quad (9.64)$$

Поскольку компоненты матрицы $(E - A^T)^{-1}$ в силу продуктивности матрицы затрат A неотрицательны, $\Delta \bar{p} > 0$. Отметим, что в этом случае расход ресурсов на выпуск продукции остается неизменным.

Пример 2. По данным для трехотраслевой экономики определить, как повлияет на увеличение цен продукции отраслей необходимость отчисления на экологические мероприятия 20% добавленной стоимости в первой отрасли и

15% — в третьей отрасли. Исходные цены по отраслям соответственно равны 20, 15 и 40 ден. ед. Матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вектор отчислений $\bar{w}_{\text{ec}}$ на экологию рассчитывается по вектору $\bar{w}$ исходных норм добавленной стоимости. В данном случае из формулы (9.62) следует, что $\bar{w} = (E - A^T)\bar{p}$, откуда получаем

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 2,5 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_{\text{ec}} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 0 \\ 2,7 \end{pmatrix}.$$

Далее по формуле (9.64) при уже вычисленной матрице $(E - A^T)^{-1}$ определяем приращение ценового вектора, компенсирующее затраты на устранение загрязнений (частичное или полное):

$$\Delta \bar{p} = \begin{pmatrix} 1,323 & 0,311 & 0,370 \\ 0,623 & 1,323 & 0,321 \\ 0,973 & 0,817 & 1,595 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,9 \\ 0 \\ 2,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,51 \\ 2,05 \\ 6,16 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате указанных отчислений в первой и третьей отраслях цены на продукцию возрастут на 17,6, 13,7 и 15,4% соответственно по отраслям.

Удорожание экологически чистой продукции является уже почти нормой в экономике. Особенно наглядно это видно на примере производства сельскохозяйственной продукции. Основная причина такого положения — использование традиционных технологий, требующих значительных затрат на минимизацию техногенного воздействия на биосферу.

9.2.3. Модели системной динамики

Основателем этого направления является Дж. Форрестер. На основе теории систем, аппарата дифференциальных уравнений и компьютерного моделирования он разработал аппарат системной динамики, позволяющий имитировать развитие ситуаций. Им были созданы модели мировой динамики «МИР-1» и «МИР-2» (1971–1972 гг.), положившие начало глобальному моделированию. Впоследствии в рамках этого направления появились более усовершенствованные модели и проекты.

Основные понятия и подходы. Опираясь на кибернетическую трактовку понятия системы, под *системой* будем понимать множество взаимосвязанных

элементов (неделимых частей системы) вместе с отношениями между элементами и их атрибутами. Можно выделить четыре признака системы:

1) целостность системы — принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств составляющих ее элементов и ее относительная независимость от других аналогичных систем;

2) наличие цели и критерия исследования множества ее элементов;

3) наличие внешней среды, вмещающей систему;

4) возможность выделения подсистем или взаимосвязанных частей, представляющих собой по отдельности тоже системы.

В сложных динамических системах элементы связаны большим числом причинно-следственных связей. Важной чертой сложных систем является подчинение их поведения закону адаптации (принцип Ле Шателье), согласно которому всякая система стремится измениться таким образом, чтобы свести к минимуму эффект внешнего воздействия. Эколоγο-экономическим системам присущи конфликты, связанные с краткосрочными и долгосрочными тенденциями реакции этих систем. Например, максимизация выпуска продукции при заданных издержках в краткосрочном периоде приводит к ухудшению экологии в долгосрочном периоде.

Связи между элементами системы бывают *положительные* и *отрицательные* соответственно, если при прочих равных условиях увеличение переменной *A* приводит к увеличению или уменьшению переменной *B*. Между элементами системы определяются контуры обратной связи с использованием понятий циклов в неориентированных графах и контуров в ориентированных графах (см. главу 4).

Затем строятся причинно-следственные диаграммы, на совокупности которых основывается системно-динамическая модель, и определяются элементы модели и их взаимосвязи. Моделирование и анализ эколого-экономических систем (ЭЭС) состоит из двух больших блоков: модели загрязнения окружающей среды и модели использования ресурсов. В случае глобальной модели ЭЭС в первом блоке используются в основном модели загрязнения атмосферы; для моделей регионального плана используются также модели загрязнения водной среды и ландшафтов. Во втором блоке рассматривают три вида моделей использования ресурсов: неоклассическую экономическую модель (без учета ограниченности запасов ресурсов в ресурсной экосистеме и накапливания отрицательных последствий их использования), природоохранную модель (с необходимостью жестких ограничений на техногенную деятельность и даже с концепцией «нулевого роста» — одним из основных требований движения «зеленых»), обобщенную модель (учитывающую условия устойчивого развития).

При построении модели основное внимание уделяется структуре системы, которая воспроизводила бы динамику протекающих в ней процессов. В качестве своеобразных «кирпичиков» используются контуры обратной связи; причем

параметры задания обратной связи могут быть заданы со значительными погрешностями — это несущественно скажется на результатах моделирования. Указанное свойство системно-динамических моделей позволяет моделировать сложные системы при неполноте исходной информации или с использованием преимущественно качественной информации.

Идентификация системно-динамических моделей состоит в следующих основных моментах:

- модель должна выходить на все равновесные траектории, присущие системе;
- модель должна адекватно отражать время перехода от состояния к состоянию (равновесные или квазистационарные состояния);
- модель должна отражать характер динамики процессов, протекающих в системе, как установившихся, так и переходных.

При соблюдении указанных условий системно-динамический подход может служить удобным инструментом изучения сложных систем в различных сферах экономики и нахождения оптимальных стратегий принятия решений.

Глобальные имитационные модели. Структура системно-динамических моделей ЭЭС включает шесть секторов: население, капиталовложения (фонды), сельскохозяйственные фонды, ресурсы, загрязнение окружающей среды и управление. Такая структура была впервые предложена Дж. Форрестером и реализована в модели «МИР-2».

Математическим аппаратом системной динамики являются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (см. главу 18*). Модель «МИР-2» была построена с использованием 82 уравнений, описывающих взаимосвязи элементов системы. Первоначально построение и анализ системно-динамических моделей носили скорее алгоритмический, чем аналитический характер. Сейчас благодаря созданию объектно-ориентированных языков программирования стало возможным создание больших моделей, включающих тысячи переменных, которые могут на достаточно достоверном уровне описывать динамику сложных систем.

В качестве иллюстрации приведем модель одного из шести указанных секторов — модель использования природных ресурсов в ресурсном секторе модели «МИР-3», разработанной в МГУ и включающей всего около 280 уравнений.

1. Пусть $P_N(t)$ — потенциально используемые ресурсы, V_d — скорость (интенсивность) открытия новых ресурсов, V_r — скорость восстановления ресурсов, зависящая от потраченных ресурсов. Тогда динамика потенциально

* См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 396.

используемых ресурсов описывается задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dP_N}{dt} = V_r - V_d, \quad P_N(t_0) = P_N^{(0)}. \quad (9.65)$$

2. Для разрабатываемых ресурсов $R_N(t)$ также имеем задачу Коши

$$\frac{dR_N}{dt} = V_d + V_{rcl} - V_{ex} - V_l, \quad R_N(t_0) = R_N^{(0)}, \quad (9.66)$$

где V_{rcl} — скорость переклассификации ресурсов (некоторые потраченные или истощенные ресурсы рассматриваются в качестве разрабатываемых); V_{ex} — скорость разработки ресурсов; V_l — скорость потерь ресурсов при их добыче.

3. Для используемых ресурсов $U_R(t)$ с учетом скорости потребления ресурсов V_c и скорости рециклирования ресурсов (их вторичной переработки) V_{rc} , зависящих от спроса $D(t)$, задача Коши имеет вид

$$\frac{dU_R}{dt} = V_{ex} + V_{rc}(D) - V_c(D), \quad U_R(t_0) = U_R^{(0)}. \quad (9.67)$$

4. Для потраченных (истощенных) ресурсов $S_R(t)$ с учетом введенных скоростей также имеем задачу Коши

$$\frac{dS_R}{dt} = V_c + V_l(D) - V_{rc}(D) - V_r - V_{rcl}, \quad S_R(t_0) = S_R^{(0)}. \quad (9.68)$$

К уравнениям (9.65)–(9.68) добавляется еще система соотношений между величинами в правых частях этих уравнений и неизвестными функциями $P_N(t)$, $R_N(t)$, $U_R(t)$ и $S_R(t)$, полученных из соотношений баланса. Таким образом, для ресурсного сектора мы имеем задачу Коши для системы, состоящей из четырех дифференциальных уравнений первого порядка.

Аналогичные системы дифференциальных уравнений составляются для каждого из перечисленных секторов, причем все неизвестные функции «зацеплены» друг с другом посредством ряда соотношений.

Теперь обратимся к результатам имитационного моделирования. В качестве примера приведем результаты расчетов, проведенных по модели «МИР-2», разработанной Дж. Форрестером и Д. Медоузом. Хотя с тех пор прошло уже более 30 лет, нам важна качественная интерпретация этих результатов, которая по-прежнему остается актуальной. В качестве точки отсчета времени был выбран 1900 год — начало XX столетия с тем, чтобы уточнить идентификацию модели по данным до середины 70-х гг. этого века. Для разных сценариев (вариантов переменных модели) рассчитывалась динамика восьми величин: невозобновимые ресурсы (1), производство продуктов питания (2), численность

населения (3), выпуск промышленной продукции на душу населения (4), загрязнение окружающей среды (5), общий темп смертности (6), общий темп рождаемости (7), производство услуг на душу населения в год (долларовый эквивалент) — (8).

На рис. 9.5 показаны соответствующие графики как результаты расчетов на 200 лет вперед с предположением о том, что никаких изменений в характере функционирования глобальной ЭЭС не произойдет. Следует сразу отметить, что масштабы кривых по вертикальной оси разные, однако здесь важны прежде всего тенденция и направленность процессов во времени. Итоги говорят о крахе системы в результате истощения невозобновимых природных ресурсов к 2100 г., хотя в 1970 г. запас ресурсов еще около 95% запаса 1900 г. Рост капитала приводит к расходованию большей части ресурсов, а когда цены на них начинают расти вследствие возрастания объема инвестиций в ресурсные отрасли, объемы инвестиций в другие отрасли падают. Наступает крах промышленной производственной базы, что обуславливает деградацию сельскохозяйственного производства и производства услуг. В связи с инерционным ростом населения социальная обстановка ухудшается — увеличивается темп смертности из-за недостатка питания и медицинских услуг. Переход к стадии деградации приходится примерно на первую половину XXI в. после пика развития. Точное

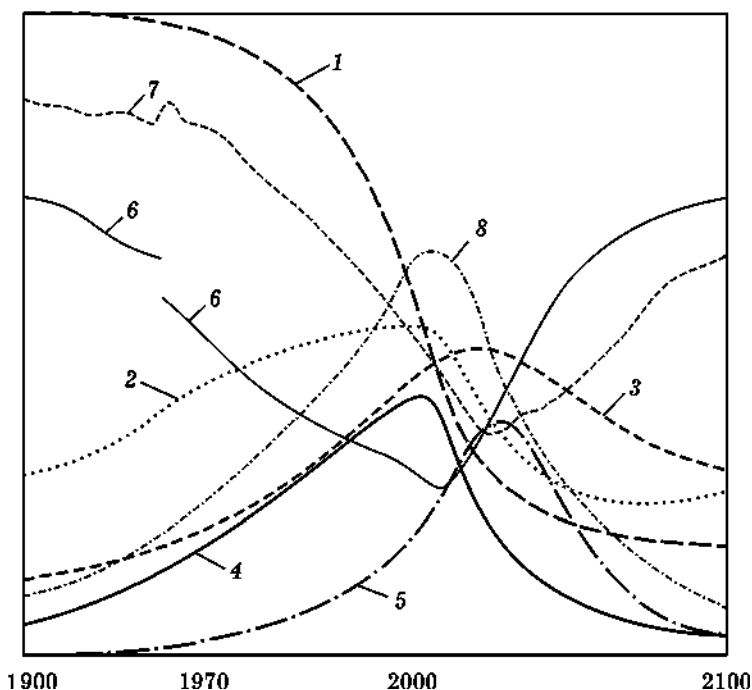


Рис. 9.5

время наступления этих событий не является значимым из-за высокого уровня агрегирования переменных модели, однако значение имеет тот факт, что рост прекращается задолго до 2100 г.

Все сценарии без контроля над загрязнением дают пессимистические прогнозы для жизнедеятельности человека: даже при неограниченных ресурсах общий темп смертности к 2100 г. увеличивается вследствие быстрого роста загрязнения окружающей среды, падает численность населения, хотя выпуск продукции и услуг на душу населения растет.

При реализации в модели достижений научно-технического прогресса, позволяющих избежать истощения ресурсов и быстрого загрязнения окружающей среды (полагалось, что с 1975 г. загрязнения от всех источников снижаются в 4 раза), но в условиях прежних стратегий использования ресурсов результаты прогноза являются более оптимистичными (рис. 9.6). Все пики смещаются к 2100 г., причем общий уровень загрязнения окружающей среды возрастает. При достижении предела орошаемых земель производство продуктов питания падает и рост промышленной продукции замедляется из-за оттока капитала в сектор производства продуктов питания.

В так называемой «стабилизированной модели МИРа-1» к ограничивающим стратегиям добавлены стратегии научно-технического прогресса, включающие

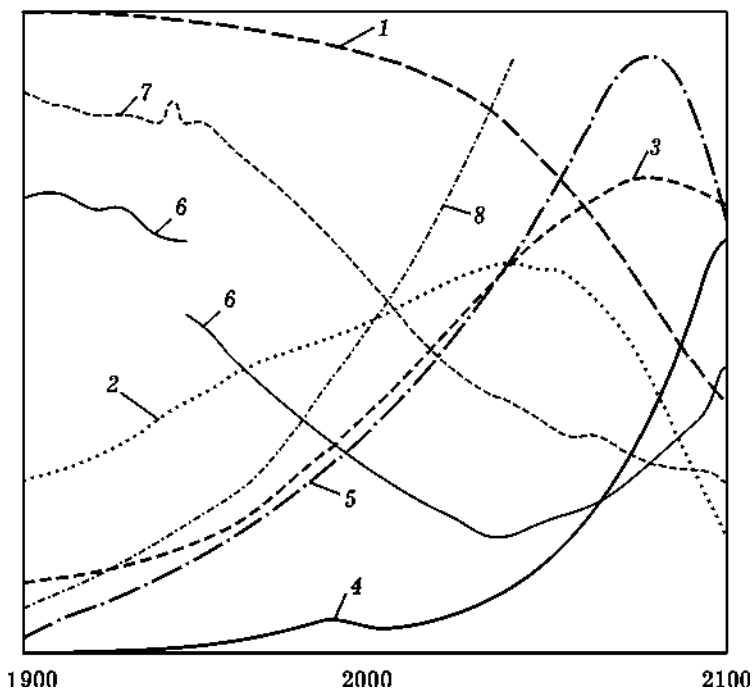


Рис. 9.6

вторичную переработку ресурсов, контроль над окружающей средой, увеличение срока службы капитала всех видов, восстановление утраченных из сельскохозяйственного оборота земель. Аспект управления состоит в том, что усилен акцент на производство услуг и продуктов питания, остановлен прирост населения, инвестиции в промышленный капитал равны его амортизации. Результаты этого сценария показаны на рис. 9.7. При снижении ресурсов примерно на треть все основные показатели стабилизируются на уровне примерно 2000 г.

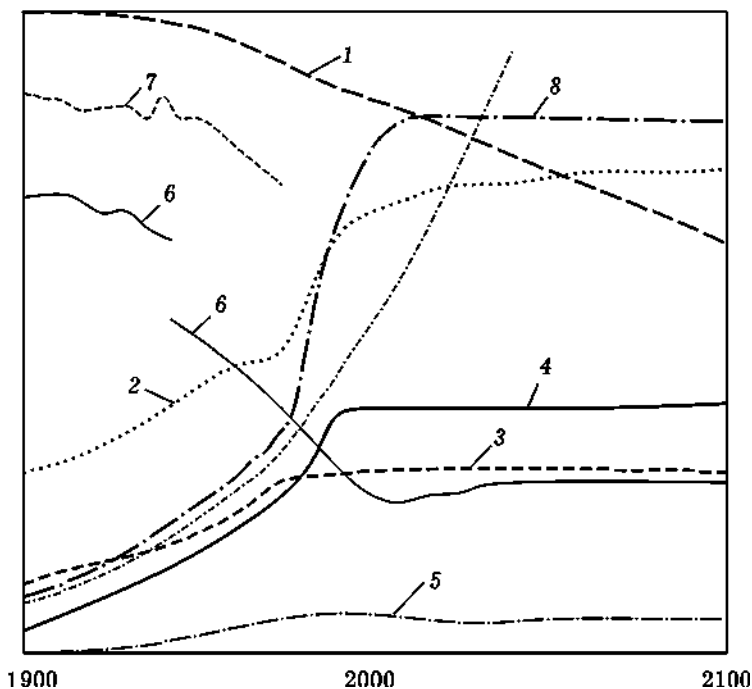


Рис. 9.7

Анализируя системно-динамический подход в целом, необходимо отметить следующие аспекты прогнозирования.

1. Все сценарии прогноза нужно воспринимать прежде всего с качественной стороны, что само по себе уже крайне важно.

2. Прогнозы на длительные сроки заведомо неустойчивы, поскольку они представляют собой экстраполирование современных экономических и технологических возможностей на далекое будущее.

3. Мультипликатор научно-технического прогресса экспоненциально растет во времени. В силу этого цикл смены технологий сильно сокращается: если раньше он составлял первые десятки лет, то теперь высокие технологии обнов-

ляются всего за несколько лет. Следовательно, мы сейчас стоим на пороге разработки и внедрения принципиально новых ресурсосберегающих, ресурсозаменяющих и замкнутых технологий производства. Разумеется, процесс использования таких технологий будет далеко не равномерным по разным странам и регионам.

4. По-видимому, в ближайшем будущем имеет смысл проводить прогноз с использованием системно-динамических моделей с обновленными программными модулями соответственно новым технологиям, причем в силу возрастающей интенсивности темпов развития этих технологий вряд ли имеет смысл проводить прогнозы на период более 50 лет.

5. Ввиду активизации процессов глобализации мировой экономики следует уделять большее внимание аспекту координированного управления экономическими процессами и техногенным влиянием человека на биосферу и окружающую среду с целью выбора оптимальных стратегий эволюции эколого-экономических систем.

Раздел 4. ЭКОНОМЕТРИКА

Глава 10. ЛИНЕЙНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Эконометрика — дисциплина, объединяющая совокупность теоретических результатов, методов и приемов, позволяющих на базе экономической теории, анализа, статистики и математико-статистического инструментария получать количественные выражения качественных закономерностей.

Курс эконометрики призван научить различным способам выражения связей и закономерностей через эконометрические модели и методы проверки их адекватности, основанные на данных наблюдений.

Термин «эконометрика» происходит от двух слов: экономия и метрика (измерение). Он был введен лауреатом Нобелевской премии по экономике норвежским ученым Р. Фишером.

В эконометрике применяют такие методы, как корреляционный и регрессионный анализ, анализ временных рядов, системы одновременных уравнений и другие методы, рассматриваемые с использованием теории вероятностей и математической статистики.

Эконометрика как наука возникла в начале XVIII в. В XIX в. были разработаны такие статистические методы, как множественная регрессия, статистическая проверка гипотез, выборочные методы (Р. Фишер, К. Пирсон, Э. Пирсон и др.); в первой половине XX в. моделированием структур спроса, потребительских расходов и их эмпирической оценкой занимались Р. Аллен, А. Маршалл и др. В тот же период начинается изучение производственной функции (Ч. Кобб, П. Дуглас). В 1969 г. первыми лауреатами Нобелевской премии по экономике стали Я. Тинберген, Р. Фишер.

Значительный вклад в развитии эконометрики внесли отечественные экономисты и математики Е.Е. Слуцкий, Л.В. Канторович, В.С. Немчинов и др.

Большинство эконометрических методов заимствовано из математической статистики. Однако методы математической статистики не учитывают специфики экономических данных, заключающейся в том, что они не являются результатом контролируемого эксперимента. В связи с изменением внешних условий в экономике не представляется возможным проводить многократные эксперименты. Экономические данные часто бывают искажены ошибками измерений, поэтому в эконометрике используются специальные методы анализа, позволяющие устранить или снизить влияние ошибок на полученные результаты.

Таким образом, эконометрика связывает экономическую теорию и статистику и с помощью математико-статистических методов придает количественное выражение общим закономерностям, устанавливаемым экономической теорией.

При моделировании экономических процессов используют пространственные и временные данные.

Пространственные данные представляют собой набор сведений по разным объектам, взятым за один и тот же период времени.

Временные данные — набор сведений, характеризующий один и тот же объект, но за разные периоды времени.

Набор сведений представляет собой множество взаимосвязанных признаков, характеризующих объект исследования, причем в этой взаимосвязи они могут выступать в одной из двух ролей:

- в роли результативного признака (аналог зависимой переменной y в математике);
- в роли факторного признака, значения которого определяют значение признака-результата (аналог независимой переменной x в математике).

В эконометрической модели результативный признак называют объясняемой переменной, а факторный признак — объясняющей переменной.

Переменные, участвующие в эконометрической модели, разделяются на:

- экзогенные (независимые), значения которых задаются извне, автономно, в определенной степени они являются управляемыми (планируемыми) (x);
- эндогенные (зависимые), значения которых определяются внутри модели, или взаимозависимые (y);
- лаговые — экзогенные или эндогенные переменные эконометрической модели, датированные предыдущими моментами времени и находящиеся в уравнении с текущими переменными, например, y_t — текущая эндогенная переменная, y_{t-1} — лаговая эндогенная переменная;
- предопределенные переменные (объясняющие переменные). К ним относятся лаговые и текущие экзогенные переменные (x_t, x_{t-1}), а также лаговые эндогенные переменные (y_{t-1}).

Любая эконометрическая модель предназначена для объяснения значений текущих эндогенных переменных в зависимости от значений предопределенных переменных.

10.1. Линейная регрессия и корреляция

10.1.1. Двумерная регрессионная модель

Пусть имеются значения двух переменных: y_i —объясняемая переменная, или результат; x_i — объясняющая переменная, или фактор.

Если каждому возможному значению x_i соответствует одно возможное значение y_i , то между этими переменными существует функциональная зависимость вида

$$y = f(x). \quad (10.1)$$

Следует отметить, что строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как обе переменные или одна из них подвержены действию случайных факторов. Поэтому будем рассматривать случай, когда строгой функциональной зависимости между переменными нет. В связи с этим необходимо по данным наблюдений (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, подобрать функцию, которая бы «наилучшим» образом отображала зависимость (10.1).

В большинстве случаев применяют линейную зависимость между переменными. При нелинейной форме связи для выполнения расчетов ее часто преобразуют в линейную.

Модель *линейной двумерной* (однофакторной, парной) регрессии записывается в виде

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i. \quad (10.2)$$

Из выражения (10.2) следует, что величина y_i состоит из двух составляющих:

$\hat{y} = b_0 + b_1 x_i$ — неслучайной составляющей;

ε_i — случайной составляющей.

На рис. 10.1 показана зависимость между ними.

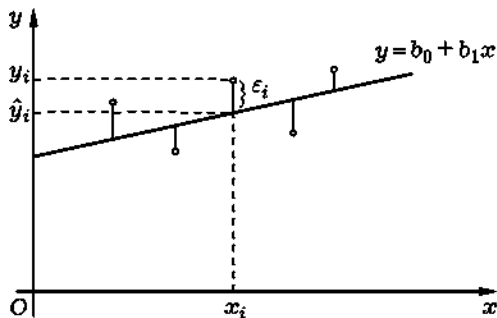


Рис. 10.1

Причинами существования ε_i могут быть наличие других факторов, которые не учтены в формуле (10.2) из-за того, что их не представляется возможным измерить, ошибки измерения переменных и др. Это приводит к тому, что наблюдаемые значения расположены вне прямой $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

В выражении (10.2) величина коэффициента регрессии b_1 показывает, на какую величину в среднем изменится результат y_i , если фактор x_i увеличится на единицу. Если $b_1 > 0$, то связь между переменными прямая, если $b_1 < 0$, то обратная.

В матричной форме двумерная регрессионная модель имеет вид:

$$Y = Xb + \varepsilon, \quad (10.3)$$

где Y — матрица-столбец размерности $n \times 1$ наблюдаемых значений резуль-
тативного признака; $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ — матрица размерности $n \times 2$
наблюдаемых значений факторных признаков; b — матрица-столбец размерно-
сти 2×1 коэффициентов регрессии; ε — матрица-столбец размерности $n \times 1$
ошибок наблюдений.

10.1.2. Нормальная линейная регрессионная модель с одной переменной

Математическая модель. Определение 1. *Нормальной* (классической)
линейной регрессионной моделью с одной переменной называется модель вида

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i, \quad (10.4)$$

для которой выполняются следующие условия (предпосылки):

- 1) $x_i, i = \overline{1, n}$, — детерминированная (неслучайная) величина;
- 2) $M(\varepsilon_i) = 0, i = \overline{1, n}$, — математическое ожидание случайной составляю-
щей, равное нулю в любом наблюдении;
- 3) $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = M[(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i)^2] = M(\varepsilon_1^2) = \sigma_{\varepsilon}^2 = \text{const}$ — теоретическая дисперсия
случайной составляющей постоянна для всех наблюдений;
- 4) $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = M[(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i)(\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}_j)] = M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, i \neq j$, — ковариация
случайных составляющих двух разных наблюдений равна нулю, т.е. отсутствует
систематическая составляющая в любых двух наблюдениях (при невыполнении
этого условия говорят об автокорреляции случайных составляющих);
- 5) $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ — иногда добавляемое условие, что случайные составляю-
щие имеют нормальное распределение.

Матричная форма нормальной линейной модели парной регрессии имеет
вид

$$Y = Xb + \varepsilon. \quad (10.5)$$

Модель имеет следующие условия (предпосылки):

1. x — детерминированная переменная.
2. $M(\varepsilon) = \bar{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$.
- 3, 4. Третья и четвертая предпосылки в матричной форме могут быть
записаны через ковариационную матрицу случайных составляющих:

$$C_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \dots & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ \text{Cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \dots & \text{Cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \dots & \text{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

Для нормальной линейной модели ковариационная матрица имеет вид $\sigma_\varepsilon^2 J$, где $J = J_{n \times n}$ — единичная матрица.

5. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$.

Отметим, что ковариация $\text{Cov}(x, y)$ двух случайных величин x, y , описывающих два признака, показывает, насколько тесна связь между этими признаками. Она вычисляется как среднее из произведений отклонений признаков от их средних значений: $\text{Cov}(x, y) = M[(x - M(x))(y - M(y))]$ и характеризуется свойствами:

- если один из двух признаков неслучайный (постоянная случайная величина), то ковариация равна нулю;
- ковариация признака с самим собой равна его дисперсии: $\text{Cov}(x, x) = \sigma_x^2$.

Метод наименьших квадратов. После определения вида функциональной зависимости необходимо оценить параметры модели.

Для оценки параметров b_0 и b_1 модели линейной парной регрессии (10.4) наиболее часто используется традиционный (обычный) *метод наименьших квадратов* (МНК*), согласно которому в качестве оценок параметров принимаются величины b_0 и b_1 , минимизирующие сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений результативного признака y_i от расчетных значений $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2 \rightarrow \min,$$

где x_i, y_i — данные наблюдений.

Для нахождения минимума функции двух переменных найдем ее частные производные по каждому из параметров и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0.$$

Получим систему из двух *нормальных* линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{cases}$$

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. — С. 364.

Оценки параметров определяются по формулам:

$$\tilde{b}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \bar{y}}{\sigma_x^2} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2},$$

$$\tilde{b}_0 = \bar{y} - \tilde{b}_1 \bar{x},$$

где σ_x^2 — дисперсия факторного признака; $\bar{y}$ — среднее значение результативно-го признака; $\bar{x}$ — среднее значение факторного признака; $\overline{xy}$ — среднее значение произведения фактора на результат.

Оценка дисперсии случайной составляющей, свойства оценок. Несмещенной оценкой дисперсии случайной составляющей ε^2 является величина

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [y_i - (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 x_i)]^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2,$$

где ε_i — разность между фактическим и рассчитанным по уравнению регрессии значениями y .

При повторении выборки того же самого объема n из той же самой генеральной совокупности и при тех же самых значениях объясняющих переменных x наблюдаемые значения зависимой переменной y будут случайным образом варьироваться. Следовательно, будут варьироваться значения оценок параметров регрессии и оценка дисперсии случайной составляющей.

Укажем свойства МНК-оценок.

Критерием лучшего способа оценивания является требование состоятельности, несмещенности и эффективности оценок.

Способ оценивания дает состоятельные оценки, если при бесконечно большом объеме выборки значение статистической оценки стремится к искомому значению параметра генеральной совокупности.

Способ оценки дает несмещенные оценки, если математическое ожидание оценки при данном способе оценивания тождественно искомому параметру генеральной совокупности при любом объеме выборки.

Оценка, полученная при данном способе оценивания, называется *эффективной*, если ее дисперсия минимальна при заданном объеме выборки.

МНК-оценки параметров и дисперсии случайной составляющей являются «наилучшими» (состоятельными, несмещенными, эффективными) оценками.

Эффективность МНК-оценок следует из теоремы Гаусса — Маркова, согласно которой метод наименьших квадратов дает оценки, имеющие наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок, если выполняются предпосылки нормальной линейной регрессионной модели.

Показатели качества регрессии. Качество модели регрессии связывается с адекватностью модели наблюдаемым данным и проводится на основе анализа остатков ε_i . Остаток представляет отклонение фактического значения зависимой переменной от значения данной переменной: $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$.

Если $\varepsilon_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то для всех наблюдений фактические значения зависимой переменной совпадают с расчетными значениями: $y_i = \hat{y}_i$. Графически это означает, что теоретическая линия регрессии проходит через все точки корреляционного поля. Следовательно, результативный признак y полностью обусловлен влиянием фактора x .

На практике, как правило, происходит некоторое рассеивание точек корреляционного поля относительно теоретической линии регрессии. Величина этих отклонений является основой расчета показателей качества (адекватности) уравнения регрессии.

При анализе качества регрессии используется теорема о разложении дисперсии, по которой общая дисперсия результативного признака разлагается на объясненную и не объясненную уравнением регрессии дисперсии:

$$\sigma^2 = \delta^{*2} + \varepsilon^{*2},$$

где $\delta^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^* - \bar{y})^2$ — объясненная уравнением регрессии дисперсия результативного признака; $\varepsilon^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ — не объясненная уравнением регрессии дисперсия результативного признака.

Рассчитываются следующие показатели качества линейной парной модели регрессии:

1. Теоретический коэффициент детерминации

$$R_{y(x)}^2 = \frac{\delta^{*2}}{\sigma^2}.$$

Он представляет собой отношение дисперсии результативного признака, объясненной уравнением дисперсии, к общей дисперсии признака-результата. При парной линейной регрессии коэффициент детерминации равен квадрату парного линейного коэффициента корреляции r_{yx}^2 : $R_{y(x)}^2 = r_{yx}^2$.

Коэффициент линейной парной корреляции r_{xy} — показатель тесноты связи между признаками y и x , вычисляемый по формуле

$$r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения фактора и результата.

Коэффициент линейной парной корреляции можно определить по формуле

$$r_{xy} = \tilde{b} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Значения линейного парного коэффициента корреляции находятся в диапазоне от -1 до $+1$. При этом если коэффициент по модулю близок к единице, то связь между признаками может быть охарактеризована как тесная. Если же коэффициент по модулю близок к нулю, то имеет место слабая линейная зависимость.

2. Коэффициент (индекс) множественной корреляции $R_{y(x)}$. Если все точки корреляционного поля лежат на теоретической линии регрессии, то $R_{y(x)} = 1$, связь между признаками y и x функциональная и уравнение регрессии хорошо описывает фактические данные. Если $R_{y(x)} = 0$, то уравнение плохо описывает фактические данные, данная связь между признаками отсутствует.

Для парной линейной регрессии $R_{y(x)} = |r_{yx}|$, где r_{yx} — парный линейный коэффициент корреляции.

3. Средняя квадратическая ошибка уравнения регрессии S_ε . Она представляет собой среднее квадратическое отклонение наблюдаемых значений результативного признака от теоретических значений, рассчитанных по модели:

$$S_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i^*)^2}{n - h}},$$

где h — число параметров в модели регрессии; при парной регрессии $h = 2$.

4. Средняя ошибка аппроксимации A равна:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i^*}{y_i} \right|.$$

Чем меньше рассеяние эмпирических точек от теоретических, тем меньше средняя ошибка аппроксимации. Ошибка аппроксимации меньше 7% свидетельствует о хорошем качестве модели.

Пример 1. По данным табл. 10.1 возраста и заработной платы рабочих получить линейную парную модель регрессии, описывающую зависимость заработной платы рабочего от возраста. Рассчитать показатели качества модели регрессии.

Таблица 10.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	29	40	36	32	23	45	38	39	49	47
y_i	300	400	300	320	200	350	350	400	380	400

Продолжение

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	28	33	25	48	30	37	42	41	31	27
y_i	250	350	200	400	220	380	390	360	260	250

Решение. Все необходимые расчеты приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2

n	x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	n	x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	29	300	8700	49	400	11	28	250	7000	64	4900
2	40	400	16000	16	6400	12	33	350	11550	9	900
3	36	300	10800	0	400	13	25	200	5000	121	14400
4	32	320	10240	16	0	14	48	400	19200	144	6400
5	23	200	4600	169	14400	15	30	220	6600	36	10000
6	45	350	15700	81	900	16	37	320	11840	1	0
7	38	350	13300	4	900	17	42	390	16380	36	4900
8	39	400	15600	9	6400	18	41	360	14760	25	1600
9	49	380	18620	169	3600	19	31	260	8060	25	3600
10	47	400	18800	121	6400	20	27	250	6750	81	4900
						Σ	720	6400	239500	1176	91400
						Средн.	36	320	11975	58,8	4570

Парная регрессия имеет вид

$$\hat{y} = 41,36 + 7,74x.$$

Определим парный линейный коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \tilde{b}_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 7,74 \cdot \frac{7,67}{67,6} = 0,878,$$

где $\sigma_x = 7,67$ — среднее квадратическое отклонение возраста рабочего; $\sigma_y = 67,6$ — среднее квадратическое отклонение заработной платы рабочего.

Теоретический коэффициент детерминации $R_{y(x)}^2 = 0,878^2 = 0,771$.

Ответ. 77,1% вариации заработной платы рабочего объясняется уравнением линейной регрессии, остальные 22,9% вариации заработной платы обусловлены влиянием не учтенных в модели факторов.

Коэффициент множественной корреляции 0,878 свидетельствует о хорошей аппроксимации модели фактических данных.

Пример 2. По данным примера 1 вычислить среднюю квадратическую ошибку уравнения регрессии и среднюю ошибку аппроксимации.

Решение. Для расчета средней квадратической ошибки уравнения регрессии определим теоретические значения $\hat{y}_i$ результативного признака, остатки $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ и их квадраты. Результаты расчетов поместим в табл. 10.3.

Вычислим среднюю квадратическую ошибку:

$$S_\varepsilon = \sqrt{\frac{21190,13}{20 - 2}} = 34,13.$$

Таблица 10.3

n	y_i	$\hat{y}_i$	ε_i	ε_i^2	n	y_i	$\hat{y}_i$	ε_i	ε_i^2
1	300	265,82	34,18	1168,27	11	250	258,08	-8,08	65,29
2	400	350,96	49,04	2404,92	12	350	296,78	53,22	2832,37
3	300	320,00	-20,00	400,00	13	200	234,86	-34,86	1215,22
4	320	289,04	30,96	958,52	14	400	412,88	-12,88	165,89
5	200	219,38	-19,38	375,58	15	220	273,56	-53,56	2868,67
6	350	389,66	-39,66	1572,92	16	320	327,74	-7,74	59,91
7	370	335,48	34,52	1191,63	17	390	366,44	23,56	555,07
8	400	343,22	56,78	3223,97	18	360	358,70	1,30	1,69
9	380	420,62	-40,62	1649,98	19	260	281,30	-21,30	453,69
10	400	405,14	-5,14	26,42	20	250	250,34	-0,34	0,12
					Σ	6400	6400	20	21190,13

О т в е т. Значение 34,13 меньше $\sigma_y = 67,6$. Следовательно, найденную модель парной регрессии целесообразно использовать. Средняя ошибка аппроксимации $A = 0,1 = 10\%$, что свидетельствует о незначительной погрешности модели.

Проверка гипотез о значимости параметров регрессии, коэффициента корреляции. Методом наименьших квадратов получены оценки параметров уравнения регрессии. Для проверки значимости параметров используют статистические методы проверки гипотез.

В качестве основной выдвигают гипотезу о незначительном отличии от нуля «истинного» параметра регрессии или коэффициента корреляции.

Альтернативной является гипотеза о неравенстве нулю «истинного» параметра регрессии или коэффициента корреляции. Для проверки этой гипотезы используется t -статистика критерия Стьюдента, имеющая распределение Стьюдента.

Найденное по данным наблюдений значение t -статистики сравнивается с критическим значением, найденным по таблицам распределения Стьюдента. Если фактическое значение t -статистики по модулю меньше критического, то нет оснований отвергать основную гипотезу, т.е. параметр незначимо отличается от нуля при заданном уровне значимости α . Если же фактическое значение t -статистики, взятое по модулю, больше критического, то основную гипотезу отвергают и считают, что с вероятностью $1 - \alpha$ параметр регрессии или коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

Для проверки гипотезы $b_1 = 0$ статистика критерия имеет вид:

$$t_{b_1=0} = \frac{\tilde{b}_1}{\mu_{b_1}},$$

где $\tilde{b}_1$ — оценка коэффициента регрессии b_1 , полученная по наблюдаемым данным; μ_{b_1} — стандартная ошибка оценки коэффициента регрессии $\tilde{b}_1$.

Для линейного парного уравнения регрессии стандартная ошибка коэффициента b_1 вычисляется по формуле

$$\mu_{b_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}{(n-2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}.$$

Для проверки гипотезы $b_0 = 0$ статистика критерия имеет вид:

$$t_{b_0=0} = \frac{\tilde{b}_0}{\mu_{b_0}},$$

где $\tilde{b}_0$ — оценка параметра регрессии b_0 , полученная по наблюдаемым данным; μ_{b_1} — стандартная ошибка оценки параметра.

Для линейного парного уравнения регрессии стандартная ошибка коэффициента b_0 вычисляется по формуле

$$\mu_{b_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n(n-2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}.$$

Для проверки гипотезы о незначительном отличии от нуля коэффициента линейной парной корреляции используют статистику

$$t_{r=0} = \frac{r_{yx}}{\mu_r},$$

где r_{yx} — оценка коэффициента корреляции, полученная по наблюдаемым данным; μ_r — стандартная ошибка выборочного коэффициента корреляции r_{yx} .

Для линейного парного уравнения регрессии

$$\mu_r = \sqrt{\frac{1 - r_{yx}^2}{n-2}}.$$

В парной линейной регрессии между наблюдаемыми значениями статистик критериев существует взаимосвязь:

$$t_{b_1=0} = t_{r=0}.$$

Приведенная формула проверки гипотезы о незначительном отличии от нуля коэффициента корреляции используется, если:

- число наблюдений n большое;
- величина $|r_{yx}|$ не близка к единице.

Если величина выборочного коэффициента корреляции по модулю близка к единице, то распределение его оценок вычисляется согласно методу, предложенному Р. Фишером. Для оценки значимости линейного парного коэффициента корреляции r_{yx} вводится вспомогательная величина z , которая при изменении r_{yx} от -1 до $+1$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Гипотеза о том, что коэффициент корреляции незначимо отличается от нуля, сводится к гипотезе о незначительном отличии от нуля величины z . Для проверки данной гипотезы используют статистику $N_{z=0} = z/\mu_z$. Стандартная ошибка μ_z определяется по формуле

$$\mu_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}},$$

где n — число наблюдений.

Критическое значение N -статистики $N_{кр}$ находят по таблицам стандартного нормального распределения по доверительной вероятности $1 - \alpha$. Основную гипотезу отвергают при $|N_{z=0}| > N_{кр}$.

Оценка значимости уравнения регрессии проводится для того, чтобы узнать, пригодно ли уравнение для дальнейшего использования. При этом выдвигают основную гипотезу о незначимости уравнения в целом (о равенстве нулю параметров регрессии) или о равенстве нулю коэффициента детерминации. Альтернативная ей гипотеза — о значимости уравнения (о неравенстве нулю параметров регрессии) или о неравенстве нулю коэффициента детерминации R^2 .

Для проверки основной гипотезы используют F -критерий со статистикой

$$F = \frac{R^2}{R^2 - 1} \frac{n - h}{h - 1},$$

где n — число наблюдений; h — число оцениваемых параметров.

Указанная статистика имеет распределение Фишера — Снедекора. По таблицам распределения Фишера — Снедекора находят критическое значение $F_{кр}$ для F -критерия в зависимости от уровня значимости α и двух степеней свободы $k_1 = h - 1$ и $k_2 = n - h$. Значение F -критерия $F_{набл.}$, рассчитанное по данным выборки, сравнивают с критическим значением $F_{кр}$. Если $F_{набл.} < F_{кр}$, то принимают гипотезу о незначимости уравнения регрессии. Если же $F_{набл.} > F_{кр}$, то гипотезу о незначимости уравнения регрессии отвергают и принимают альтернативную гипотезу о статистической значимости уравнения регрессии.

Для линейной парной регрессии статистики критериев проверки гипотез связаны между собой:

$$t_{b1=0} = t_{r=0} = \sqrt{F_{набл.}}.$$

10.2. Нелинейная регрессия и корреляция

10.2.1. Нелинейная регрессия

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью нелинейных функций.

Различают два класса *нелинейных регрессий*: регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примерами нелинейной регрессии по включаемым в нее объясняющим переменным являются функции:

- полиномы разных степеней: $y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$;

- равносторонняя гипербола: $y = a + b/x + \varepsilon$.

К нелинейным регрессиям по оцениваемым параметрам относятся функции:

- степенная: $y = ax^b\varepsilon$;
- показательная $y = ab^x\varepsilon$;
- экспоненциальная $y = e^{a+bx}\varepsilon$.

Нелинейные регрессии первого класса. Нелинейная регрессия по включенным переменным (первого класса) определяется, как и в линейной регрессии, методом наименьших квадратов (МНК), так как эти функции линейны по параметрам. Например, в параболе второй степени, которую запишем в виде

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \varepsilon, \quad (10.6)$$

заменяя переменные $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \varepsilon, \quad (10.7)$$

для оценки параметров которого используется МНК.

Соответственно для полинома третьего порядка

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \varepsilon \quad (10.8)$$

при замене $x = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$ получим трехфакторную модель линейной регрессии вида

$$y = a_0 + a_1x + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon \quad (10.9)$$

и т.д.

Таким образом, полином любого порядка сводится к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров и проверки гипотез. В экономических

исследованиях чаще всего используется парабола второй степени; в отдельных случаях — полином третьего порядка.

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y, \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum xy, \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum x^2 y. \end{cases} \quad (10.10)$$

Система содержит три уравнения с тремя неизвестными коэффициентами a_0 , a_1 , a_2 и ее решение может быть произведено, например, по формулам Крамера.

Пример 3. Данные результатов наблюдений представлены в табл. 10.4. Определить методом наименьших квадратов параметры a_0 , a_1 , a_2 зависимости вида $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Таблица 10.4

x	-2	-1	0	1	2
y	4,8	0,4	-3,3	-0,8	3,2

Решение. Составим вспомогательную таблицу и произведем расчеты, необходимые для составления системы нормальных уравнений (табл. 10.5).

Таблица 10.5

№ п/п	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	-2	4,8	4	-8	16	-9,6	19,2
2	-1	0,4	1	-1	1	-0,4	0,4
3	0	-3,3	0	0	0	0	0
4	1	-0,8	1	1	1	-0,8	-0,8
5	2	3,2	4	8	16	6,4	12,8
Σ	0	4,3	10	0	34	-4,4	31,6

На основе полученных результатов расчета система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 + 10a_2 = 4,3, \\ 0a_0 + 10a_1 + 0a_2 = -4,4, \\ 10a_0 + 0a_1 + 34a_2 = 31,6. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, получим: $a_0 = -2,42$, $a_1 = -0,44$, $a_2 = 1,64$. Таким образом, уравнение параболической зависимости примет вид:

$$Y = -2,42 - 0,44x + 1,64x^2.$$

Парабола второй степени при $b > 0$ и $c < 0$ симметрична относительно ее вертикальной оси, проходящей через высшую точку, т.е. точку максимума, изменяющую направление связи, а именно рост на падение. Такую функцию можно наблюдать в экономике труда при изучении зависимости заработной платы работников физического труда от возраста, с увеличением возраста повышается заработная плата, так как одновременно увеличивается опыт и повышается квалификация работника. Однако с определенного возраста ввиду старения организма и снижения производительности труда дальнейшее повышение возраста может приводить к снижению заработной платы работника.

При $b < 0$ и $c > 0$ парабола второго порядка симметрична относительно своей оси, проходящей через низшую точку, что позволяет определять минимум функции в точке, меняющей направление связи, т.е. снижение на рост.

Ввиду симметричности относительно оси парабола второй степени далеко не всегда пригодна в конкретных исследованиях, чаще имеют дело лишь с отдельными сегментами параболы.

К классу нелинейных функций, параметры которых оцениваются МНК, следует отнести равностороннюю гиперболу:

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon. \quad (10.11)$$

Она может быть использована на микро- и макроуровне, например, для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота. Классическим ее примером является *кривая Филлипса*^{*}, характеризующая соотношение между нормой безработицы и процентом прироста заработной платы.

Для равносторонней гиперболы (10.11) обозначим $z = 1/x$, получим линейное уравнение регрессии

$$Y = a + bz + \varepsilon,$$

оценка параметров которого может быть определена МНК. Система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \frac{1}{x}, \\ \sum \frac{y}{x} = a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2}. \end{cases} \quad (10.12)$$

При $b > 0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \rightarrow \infty$ характеризуется нижней асимптотой.

^{*}Филлипс Уэнделл (1811–1884) — ученый США, публицист.

При $b < 0$ имеем медленно растущую функцию с верхней асимптотой при $x \rightarrow \infty$.

Примером такой зависимости может служить взаимосвязь доли расходов на товары длительного пользования и общих сумм расходов (доходов). Математическое описание подобных взаимосвязей получило название *кривых Энгеля**. В 1857 г. Э. Энгель на основе исследования семейных расходов сформулировал закономерность — с ростом дохода его доля, расходуемая на продовольствие, уменьшается. Соответственно с увеличением дохода его доля, расходуемая на непродовольственные товары, будет возрастать. Однако это увеличение не беспредельно, ибо на все товары сумма долей не может быть больше единицы.

Нелинейные регрессии второго класса. Рассмотрим регрессию, нелинейную по оцениваемым параметрам (второго класса). Данный класс нелинейных моделей делится на два типа: *нелинейные модели внутренне линейные* и *нелинейные модели внутренне нелинейные*. Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Если же нелинейная модель внутренне нелинейна, то она не может быть сведена к линейной функции. Например, в эконометрических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция:

$$y = ax^b \varepsilon, \quad (10.13)$$

где y — спрашиваемое количество; x — цена; ε — случайная ошибка.

Модель нелинейна относительно оцениваемых параметров, так как включает параметры a и b неаддитивно. Однако ее можно считать внутренне линейной, так как логарифмирование данного уравнения приводит его к линейному виду:

$$\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon. \quad (10.14)$$

Оценки параметров a и b уравнения (10.14) могут быть найдены МНК. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + b \sum \ln x, \\ \sum \ln y \cdot \ln x = \ln a \sum \ln x + b \sum \ln^2 x. \end{cases}$$

Параметр b определяется из системы, а параметр a — потенцированием выражения $\ln a$.

При этом предполагается, что случайная ошибка ε функции (10.14) мультипликативно связана с объясняющей переменной x . Если же модель представить в виде

$$y = ax^b + \varepsilon,$$

*Энгель Эрнст (1821–1896) — немецкий экономист, статистик.

то она становится внутренне нелинейной, так как ее невозможно превратить в линейный вид.

К внутренне нелинейным относятся модели вида

$$y = a + bx^c + \varepsilon, \quad (10.15)$$

$$y = a \left(1 - \frac{1}{1 - x^b} \right) + \varepsilon. \quad (10.16)$$

Эти уравнения не могут быть преобразованы в уравнения, линейные по коэффициентам.

Если модель внутренне нелинейна по параметрам, то для оценки параметров используются итеративные процедуры, сходимость которых зависит от вида уравнений и особенностей применяемого итеративного подхода. Модели внутренне нелинейные по параметрам могут иметь место в эконометрических исследованиях. Однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду. Решение такого типа моделей реализовано в стандартных пакетах прикладных программ.

Из нелинейных функций, которые могут быть приведены к линейному виду, широко используется степенная функция $y_x = ax^b$. Это объясняется тем, что параметр b в ней является *коэффициентом эластичности*, показывающим, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1%. Коэффициент эластичности Θ вычисляется по формуле

$$\Theta = f'(x) \frac{x}{y}, \quad (10.17)$$

где $f'(x)$ — первая производная функции.

Коэффициент эластичности можно определять и при наличии других форм связи, но только для степенной функции он представляет собой постоянную величину, равную параметру b . В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора x . Например, для линейной регрессии $y = a + bx$ имеем $f'(x) = b$, а значит,

$$\Theta = \frac{bx}{a + bx}.$$

В силу того что коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x , обычно рассчитывается *средний показатель эластичности*

$$\bar{\Theta} = b \frac{\bar{x}}{y}.$$

Несмотря на широкое использование в эконометрике коэффициентов эластичности, возможны случаи, когда их расчет экономического смысла не имеет.

Это происходит тогда, когда для рассматриваемых признаков бессмысленно определение изменения значений в процентах. Например, вряд ли кто будет определять, на сколько процентов изменится урожайность пшеницы, если качество почвы, измеряемое в баллах, изменится на 1%. В такой ситуации степенная функция, даже если она оказывается наилучшей по формальным соображениям (исходя из наименьшего значения остаточной вариации), не может быть экономически интерпретирована.

В моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, но приводимых к линейному виду, МНК применяется к преобразованным уравнениям. Если в линейной модели и моделях, нелинейных по переменным, при оценке параметров исходят из критерия $\sum (y - y_x)^2 \rightarrow \min$, то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, требование МНК применяется не к исходным данным результативного признака, а к их преобразованным величинам $\ln y$, $1/x$. Это значит, что оценка параметров основывается на минимизации суммы квадратов отклонений в логарифмах.

Вследствие этого оценка параметров для линеаризуемых функций МНК оказывается несколько смещенной.

Практическое применение экспоненты возможно, если результативный признак не имеет отрицательных значений. Поэтому если исследуется, например, финансовый результат деятельности предприятий, среди которых наряду с прибыльными есть и убыточные, то данная функция не может быть использована.

10.2.2. Нелинейная корреляция

Уравнение нелинейной регрессии, как и в линейной зависимости, дополняется *индексом корреляции* R :

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}}, \quad (10.18)$$

где σ_y^2 — общая дисперсия результативного признака y ; $\sigma_{\text{ост}}^2$ — остаточная дисперсия, определяемая из уравнения регрессии $y_x = f(x)$.

Так как

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}, \quad \sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum (y - y_x)^2}{n},$$

то

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - y_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}. \quad (10.19)$$

Индекс корреляции находится в границах $0 \leq R \leq 1$ и чем ближе к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, более надежно найдено уравнение регрессии.

Пример 4. Вычислить индекс корреляции на основе данных примера 1.

Решение. Результаты вычислений приведены в табл. 10.6.

Таблица 10.6

№ п/п	x	y	y_x	$y - y_x$	$(y - y_x)^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1	-2	4,8	5,02	-0,22	0,0484	3,94	15,5236
2	-1	0,4	-0,34	0,74	0,5476	-0,46	0,2116
3	0	-3,3	-2,42	-0,88	0,7744	-4,16	17,3056
4	1	-0,8	-1,22	0,42	0,1764	-1,66	2,7556
5	2	3,2	3,26	-0,06	0,0036	2,34	5,4756
Σ	0	4,3			1,5504		41,272

Значения y_x определим путем подстановки в полученное в примере 1 выражение

$$y_x = -2,42 - 0,44x + 1,64x^2$$

соответственно значений x , равных -2, -1, 0, 1, 2. Получим:

$$y_1 = -2,42 - 0,44 \cdot (-2) + 1,64 \cdot (-2)^2 = 5,02.$$

Аналогично находим y_2, y_3, y_4, y_5 .

Вычислим индекс корреляции по формуле (10.19)

$$R = \sqrt{1 - \frac{1,5504}{41,272}} = 0,981.$$

Индекс корреляции близок к единице, поэтому можно сделать вывод о достаточно тесной связи между заданными величинами.

Парабола второй степени, как и полином более высокого порядка, при линеаризации принимает вид уравнения множественной регрессии. Если же нелинейное относительно объясняемой переменной уравнение регрессии при линеаризации принимает форму линейного уравнения парной регрессии, то для оценки тесноты связи может быть использован линейный коэффициент корреляции, величина которого в этом случае совпадет с индексом корреляции $R_{yx} = r_{yz}$, где z — преобразованная величина признака-фактора, например $z = 1/x$ или $z = \ln x$.

Иначе обстоит дело, когда преобразования уравнения в линейную форму связаны с зависимой переменной. В этом случае линейный коэффициент корреляции по преобразованным значениям признаков дает приближенную оценку тесноты связи и не совпадает с индексом корреляции. Например, для степенной функции $y_x = ax^b$ после перехода к линейному уравнению $\ln y = \ln a + b \ln x$ может быть вычислен линейный коэффициент корреляции не для фактических переменных x и y , а для их логарифмов.

Не совпадают данные показатели и для уравнения регрессии в виде экспоненты, так как при преобразовании в линейную форму рассчитывается линейный коэффициент корреляции между x и $\ln y$. При использовании в преобразовании нелинейных соотношений в линейную форму обратных значений результативного признака, т.е. $1/y$, индекс корреляции R_{yx} также не будет совпадать с линейным коэффициентом корреляции.

Следует иметь в виду, что если при линейной зависимости признаков один и тот же коэффициент корреляции характеризует регрессию как $y_x = a + bx$, так и $X_y = A + By$, так как $r_{yx} = r_{xy}$, то при криволинейной зависимости R_{yx} для функции $y = f(x)$ не равен R_{xy} для регрессии $x = f(y)$.

Поскольку в расчете индекса корреляции используется соотношение факторной и общей суммы квадратов отклонений, то R^2 имеет тот же смысл, что и коэффициент (индекс) детерминации.

Оценка существенности индекса корреляции проводится так же, как и оценка надежности линейного коэффициента корреляции.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по F -критерию Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m}, \quad (10.20)$$

где R^2 — индекс детерминации; n — число наблюдений; m — число параметров при переменных x .

Величина m характеризует число степеней свободы для факторной суммы квадратов, а $n - m - 1$ — число степеней свободы для остаточной суммы квадратов.

Для степенной функции $y_x = ax^b$ число $m = 1$ и формула для определения F -критерия примет тот же вид, что и при линейной зависимости:

$$F = \frac{R^2(n - 2)}{1 - R^2}. \quad (10.21)$$

Для параболы второй степени $y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$, $m = 2$, т.е.

$$F = \frac{R^2(n - 3)}{2(1 - R^2)}. \quad (10.22)$$

Пример 5. Зависимость потребления продукта A от среднедушевого дохода по данным 20 семей характеризуется следующими данными:

- уравнение регрессии $y_x = 2x^{0,3}$;
- индекс корреляции $\rho_{xy} = 0,9$;
- остаточная дисперсия $\sigma_{\text{ост}}^2 = 0,06$.

Провести дисперсионный анализ полученных результатов.

Решение. Результаты расчетов приведены в табл. 10.7.

Таблица 10.7

Вариация результата y	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Дисперсия на одну степень свободы	$F_{\text{факт}}$
Общая	$n - 1 = 19$	6,316	—	—
Факторная	$k_1 = m = 1$	5,116	5,116	76,7
Остаточная	$k_2 = n - m - 1 = 18$	1,2	0,0667	—

Исходя из данных табл. 10.7 получаем:

$$S_{\text{ост}} = \sigma_{\text{ост}}^2 n = 0,06 \cdot 20 = 1,2; \quad S_{\text{общ}} = \frac{S_{\text{ост}}}{1 - \rho_{xy}^2} = \frac{1,2}{1 - 0,81} = 6,316;$$

$$S_{\text{факт}} = 6,316 - 1,2 = 5,116; \quad F_{\text{факт}} = \frac{0,9^2 \cdot 18}{1 - 0,9^2} = 76,7.$$

По таблице распределения Фишера — Снедекора при $\alpha = 0,05$ $k_1 = 1$, $k_2 = 18$ определяем критическое значение $F_{\text{табл}} = 4,41$. В силу того что $F_{\text{факт}} = 76,7 > 4,41 = F_{\text{табл}}$, гипотеза о незначимости различий факторной и остаточной дисперсий отклоняется. Эти различия существенны, статистически значимы, уравнение надежно, значимо, показатель тесноты связи надежен и отражает устойчивую зависимость потребления продукта A от среднедушевого дохода.

10.3. Множественная регрессия и корреляция

10.3.1. Нормальная линейная модель множественной регрессии

Основные понятия. Обобщением линейной регрессии с двумя переменными является модель множественной регрессии, которую можно представить в виде

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_j x_{ji} + \dots + b_k x_{ki} + \varepsilon_i, \quad (10.23)$$

где y_i — значение зависимой переменной для i -го наблюдения ($i = \overline{1, n}$); b_0 — свободный член; b_j — коэффициент при j -м факторе ($j = \overline{1, k}$); x_{ji} — значение j -го фактора независимой или объясняющей переменной для i -го наблюдения; ε_i — случайная составляющая зависимой переменной i -го наблюдения.

Для многомерной регрессионной модели имеют место следующие предположения:

1. Переменные $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{ki}$ — величины неслучайные.
2. Математическое ожидание случайной составляющей в любом наблюдении равно нулю: $M(\varepsilon_i) = 0$.

3. Дисперсия случайной составляющей постоянна для всех наблюдений: $D(\varepsilon_i) = \delta^2 = \text{const}$.

4. Систематическая связь между значениями случайной составляющей в любых двух наблюдениях отсутствует: $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$.

5. Случайная составляющая ε_i — нормально распределенная случайная величина.

Модель линейной множественной регрессии (10.23), для которой выполняются вышеуказанные предпосылки, называется *нормальной* (классической) линейной регрессионной моделью.

Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны быть количественно измеримы и не должны сильно коррелировать друг с другом. Кроме того, каждый фактор должен быть тесно связан с результатом. Коэффициент парной линейной корреляции фактора и результата должен существенно отличаться от нуля.

В матричной форме нормальная регрессионная модель (10.23) записывается в виде

$$y = xb + \varepsilon,$$

где y — матрица-столбец или вектор значений зависимой переменной размерности $n \times 1$; x — матрица значений независимых переменных размерности $n \times (k+1)$. (добавление единицы к общему числу факторов k учитывает свободный член b_0 уравнения регрессии); b — матрица-столбец или вектор размерности $(k+1) \times 1$, содержащая неизвестные, подлежащие оценке параметров модели; ε — случайный вектор-столбец размерности $n \times 1$ ошибок наблюдений. Эти составляющие модели записываются следующим образом:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Оценка параметров нормальной модели множественной регрессии.

Основная задача регрессионного анализа заключается в нахождении по выборке объемов и в оценке неизвестных коэффициентов регрессии $b_0, b_1, \dots, b_k$ модели.

Оценка параметров многомерной модели аналогично парной регрессии осуществляется методом наименьших квадратов (МНК). В качестве оценки вектора $\bar{b}$ принимают вектор b линии, минимизирующей сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от рассчитанных по модели $\hat{y}_i$.

В матричной форме функционал S имеет вид:

$$S = (y - xb)^T(y - xb) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min. \quad (10.24)$$

Оценки находятся по формулам:

$$b = (x^T x)^{-1} x^T y. \quad (10.25)$$

Так, для двухфакторной линейной модели $y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 + b_2 x_{2i} + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$, имеем

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i}))^2 \rightarrow \min. \quad (10.26)$$

Из выражения (10.26) следует, что функционал S является функцией переменных b_0, b_1, b_2 .

Для нахождения экстремума функционала S найдем частные производные по этим переменным и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_2} = 0.$$

Получим систему нормальных линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}, \\ \sum_{i=1}^n y_i x_{1i} = b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i}, \\ \sum_{i=1}^n y_i x_{2i} = b_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2. \end{cases}$$

Теорема Гаусса, сформулированная для парной регрессионной модели, является верной и для модели множественной регрессии (10.23).

Пример 6. Имеются данные по трем показателям, приведенным в табл. 10.8. Оценить параметры линейной множественной регрессии.

Решение. Предположим, что между переменными y , x_1 и x_2 существует линейная корреляционная зависимость. Найдем уравнение регрессии y по x_1 и x_2 . Оценки параметров линейного двухфакторного уравнения регрессии вида (10.23) определим матричным способом. Обозначим

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 330 \\ 360 \\ \dots \\ 220 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 25 & 14 \\ 1 & 32 & 16 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таблица 10.8

i	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	y^2
1	330	25	14	8250	4620	625	196	350	108900
2	360	32	16	11520	5760	1024	256	512	129600
3	320	30	13	960	4160	900	169	390	102400
4	280	28	8	7840	2240	784	64	224	78400
5	240	23	6	5520	1440	529	36	138	57600
6	380	35	17	13300	6460	1225	289	595	144400
7	400	38	19	15200	7600	1444	361	722	160000
8	360	36	16	12960	5760	1296	256	576	129600
9	320	31	14	9920	4480	961	196	434	102400
10	400	39	20	15600	8000	1521	400	780	160000
11	280	27	9	7560	2520	729	81	243	78400
12	420	40	21	16800	8820	1600	441	840	176400
13	220	24	5	5280	1100	576	25	120	48400
14	380	37	18	14060	6840	1369	324	666	144400
15	200	22	4	4400	800	484	16	88	40000
16	300	29	13	8700	3900	841	169	377	90000
17	360	34	15	12240	5400	1156	225	510	129600
18	320	33	12	10560	3840	1089	144	396	102400
19	260	26	7	6760	1840	676	49	182	67600
20	220	21	4	4620	880	441	16	84	48400
Σ	6350	610	251	192050	86460	19270	3713	8227	2098900

Для удобства вычислений составляем вспомогательную таблицу.

По правилу умножения матриц вычислим

$$C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 25 & 32 & \dots & 21 \\ 14 & 16 & \dots & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 25 & 14 \\ 1 & 32 & 16 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 610 & 251 \\ 610 & 19270 & 8227 \\ 251 & 8227 & 3713 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную матрице $C^T C^*$. В данном случае с точностью до четвертого десятичного знака имеем

$$(C^T C)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 610 & 251 \\ 610 & 19270 & 8227 \\ 251 & 8227 & 3713 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4,0482 & -0,2094 & 0,1903 \\ -0,2094 & 0,0118 & -0,012 \\ 0,1903 & -0,012 & 0,0139 \end{pmatrix}.$$

По правилу умножения матриц вычислим $C^T \tilde{a}$:

$$C^T \tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 25 & 32 & \dots & 21 \\ 14 & 16 & \dots & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 330 \\ 360 \\ \dots \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6350 \\ 192050 \\ 86460 \end{pmatrix}.$$

*См.: Красс М.С. Математика в экономике. Основы математики. – С. 45.

Вектор оценок коэффициентов регрессии равен:

$$\bar{b} = (C^T C)^{-1} C^T \tilde{a} = \begin{pmatrix} 4,0482 & -0,2094 & 0,1903 \\ -0,2094 & 0,0118 & -0,012 \\ 0,1903 & -0,012 & 0,0139 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6350 \\ 192050 \\ 86460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1944,14 \\ -101,02 \\ 105,60 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $b_0 = 1993,75$; $b_1 = -60,07$; $b_2 = 112,34$. Уравнение множественной регрессии примет вид:

$$y = 1944,14 - 101,02x_1 + 105,60x_2.$$

10.3.2. Некоторые особенности множественной регрессии и корреляции

Множественная регрессия представляет регрессию результативного признака с двумя или большим числом независимых переменных вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

В уравнении регрессии случайная величина y зависит не только от значений независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$, но и от ряда других факторов, влияющих на y , которые не могут быть проконтролированы. В связи с этим

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) + \varepsilon,$$

где ε — случайная величина, характеризующая отклонения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

При исследовании зависимости результативного признака y от ряда факторов $x_1, x_2, \dots, x_k$ необходимо решать такие же задачи, что и при парной связи двух переменных x и y :

- определение вида регрессии;
- оценка параметров;
- определение тесноты связи между случайными величинами x и y .

Однако наряду с этими задачами необходимо рассматривать и ряд задач, характерных лишь для множественной регрессии и корреляции. К таким задачам относится отбор факторов $x_1, x_2, \dots, x_k$, существенно влияющих на фактор y , при наличии возможностей внутренней взаимосвязи между переменными $x_1, x_2, \dots, x_k$. Такой отбор требует прежде всего глубокого теоретического и практического знания качественной стороны рассматриваемых экономических явлений.

Отбор факторов осуществляется в несколько этапов. Сначала отбираются факторы, связанные с изучаемым явлением на основе данных теоретического исследования (экономическая теория, заключения специалиста и т.д.). При этом для построения множественной регрессии и корреляции отбираются факторы, которые могут быть количественно измеримы.

Отобранные факторы подвергаются математико-статистической проверке существенности их влияния на изучаемый показатель. Такая проверка, как правило, включает анализ матрицы парных корреляций, частных корреляций, существенности (значимости) коэффициентов регрессии на основе t -критерия, анализ остатков (отклонений) и т.д.

Особенностью множественной регрессии и корреляции является необходимость различать случаи корреляционной множественной связи, когда переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$ — случайные величины; регрессионной, если переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$ — неслучайные величины, а также смешанный случай, когда некоторые из переменных — случайные величины, другие — неслучайные. В случае корреляционной зависимости следует вычислять и интерпретировать коэффициенты корреляции; при регрессионной зависимости это не имеет смысла, а при наличии случайных и неслучайных переменных коэффициенты корреляции следует вычислять только между случайными переменными.

10.3.3. Отбор факторов и методы построения множественной линейной корреляционной и регрессионной зависимости

Множественная линейная корреляционная зависимость. Рассмотрим отбор факторов для построения множественной линейной зависимости, когда переменные $y, x_1, x_2, \dots, x_p$ являются случайными величинами (обычно предполагается, что их совместное распределение нормальное).

Наиболее простой формой зависимости и достаточно строго обоснованной для случая совместного нормального распределения является линейная, т.е. зависимость вида

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p. \quad (10.27)$$

Такая зависимость во многих случаях достаточно хорошо отражает сложившиеся экономические взаимосвязи. Исходная информация для построения зависимости (10.27) обычно задается в виде таблицы (табл. 10.9).

Таблица 10.9

№ п/п	Факторы, для которых получены данные					
	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	Y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	$\dots$	x_{k1}	Y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	$\dots$	x_{k2}	Y_2
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	$\dots$	x_{k3}	Y_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	$\dots$	x_{kn}	Y_n

Следует определить, все ли переменные нужно включать в уравнение (10.27) или есть переменные, которые существенно не влияют на величину y и их нецелесообразно включать в (10.27). В первом случае $p = k$, во втором $p < k$.

Для решения этого часто используется таблица, составленная из коэффициентов парной корреляции. Элементами такой таблицы являются коэффициенты парной корреляции для всех k факторов (табл. 10.10).

Таблица 10.10

	Y	X_1	X_2	X_3	$\dots$	X_k
Y	1	r_{y1}	r_{y2}	r_{y3}	$\dots$	r_{yk}
X_1	r_{1y}	1	r_{12}	r_{13}	$\dots$	r_{1k}
X_2	r_{2y}	r_{21}	1	r_{23}	$\dots$	r_{2k}
X_3	r_{3y}	r_{31}	r_{32}	1	$\dots$	r_{3k}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
X_k	r_{ky}	r_{k1}	r_{k2}	r_{k3}	$\dots$	1

В клетках таблицы записаны парные коэффициенты корреляции, например r_{31} — парный коэффициент корреляции между переменными X_3 и X_1 . Отметим, что коэффициенты r_{yj} и r_{jy} , а также r_{ij} и r_{ji} совпадают.

По данным такой таблицы можно примерно оценить, какие факторы существенно влияют на переменную y , а какие — несущественно, а также выявить взаимосвязь между факторами.

Пример 7. Рассмотрим таблицу парных коэффициентов корреляции (табл. 10.11). На основании данных, указанных в таблице, можно сделать

Таблица 10.11

	y	X_1	X_2	X_3
y	1	0,6	0,5	0,7
X_1	0,6	1	0,04	0,03
X_2	0,5	0,04	1	0,1
X_3	0,7	0,03	0,1	1

вывод, что связь факторов x_1, x_2, x_3 с фактором y существенная (коэффициенты корреляции равны соответственно 0,6; 0,5; 0,7). Теснота связи между самими факторами x_1, x_2, x_3 незначительная (коэффициенты корреляции 0,04, 0,03, 0,1). Такая информация наиболее благоприятна для построения уравнения (10.27).

Рассмотрим следующую таблицу (табл. 10.12). Согласно данным величина коэффициента парной корреляции между y и x_4 мала, в связи с этим нецелесообразно включать фактор x_4 в уравнение (10.27). Высок коэффициент парной корреляции между переменными x_1 и x_3 , равный 0,9, что показывает их тесную корреляционную взаимосвязь. В этом случае в уравнение (10.27) не включают одновременно x_1 и x_3 , а вводят один из них в зависимости от их смысла и мнения исследователя. Нецелесообразно включать в уравнение одновременно показатели, представляющие сумму некоторых факторов или их составных частей, а также характеризующие

Таблица 10.12

	y	X_1	X_2	X_3	X_4
y	1	0,65	0,6	0,5	0,03
X_1	0,65	1	0,5	0,9	0,3
X_2	0,6	0,5	1	0,3	0,2
X_3	0,5	0,9	0,3	1	0,2
X_4	0,03	0,3	0,2	0,2	1

один и тот же фактор, выраженный в различных единицах измерения, например абсолютных и относительных.

Обычно кроме анализа таблицы парных коэффициентов корреляции для отбора существенных факторов вычисляют частные коэффициенты корреляции, определяют надежность полученных коэффициентов регрессии по t -критерию и по другим критериям.

При анализе последней таблицы парных коэффициентов корреляции связи можно обратить внимание на то, что связи между изучаемыми переменными довольно сложным образом переплетаются между собой. Поэтому целесообразно рассмотреть вопрос о взаимосвязи между факторами при условии, что некоторые или все остальные факторы остаются неизменными.

Для выявления такой взаимосвязи используются коэффициенты *частной корреляции*. Вычислим коэффициент частной корреляции между факторами y и x_1 при условии, что фактор x_2 закреплён на постоянном уровне (остается неизменным), тогда он равен:

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{\sqrt{1 - r_{yx_2}^2} \sqrt{1 - r_{x_1x_2}^2}}. \quad (10.28)$$

Если закреплён лишь один фактор, то такой коэффициент называется коэффициентом частной корреляции первого порядка. Если закреплёны два фактора, то — второго порядка и т.д. Тогда обычный коэффициент парной корреляции можно называть *частным коэффициентом корреляции нулевого порядка*.

В выражении (10.28) коэффициент первого порядка (закреплён один фактор x_2 в скобках) выражается через коэффициенты нулевого порядка.

Коэффициенты частной корреляции второго порядка можно выразить через коэффициенты первого порядка при помощи соотношения

$$r_{yx_1(x_2, x_3)} = \frac{r_{yx_1(x_2)} - r_{yx_3(x_2)}r_{x_1x_3(x_2)}}{\sqrt{1 - r_{yx_3(x_2)}^2} \sqrt{1 - r_{x_1x_3(x_2)}^2}}. \quad (10.29)$$

Аналогично можно записать соотношения, выражающие коэффициент частной корреляции k -го порядка через коэффициенты $(k - 1)$ -го порядка.

Следует отметить, что малость коэффициентов частной корреляции низших порядков не гарантирует малости коэффициентов более высокого порядка. Например, r_{yx_1} и $r_{x_1x_2}$ могут быть оба малыми, а $r_{yx_1(x_2)}$ может быть велик.

Предположим, $r_{yx_2} = 0$, тогда (10.28) запишется в виде

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1}}{\sqrt{1 - r_{x_1x_2}^2}}. \quad (10.30)$$

Если r_{yx_1} мал, а $r_{x_1x_2}$ велик, то $r_{yx_1(x_2)}$ может быть также большим.

циентов регрессии. Например, если коэффициент множественной корреляции $R = 0,7$, то коэффициент множественной детерминации $R^2 = 0,49$, т.е. 49% вариации объясняется факторами, включенными в уравнение регрессии, а 51% — прочими факторами.

Существенность отличия от нуля выборочного коэффициента множественной корреляции проверяется на основе F -критерия (критерия Фишера). Вычисляется величина

$$F = \frac{R^2(n-p-1)}{(1-R^2)p}, \quad (10.32)$$

где R — множественный коэффициент корреляции; p — число факторов $x_1, x_2, \dots, x_p$; n — число наблюдений.

Найденное значение F для F -критерия сравнивается с табличным значением $F_{\text{табл.}}$, которое определяется при числе степеней свободы $k_1 = p$, $k_2 = n - p - 1$ и заданном уровне значимости α . Если расчетное значение $F > F_{\text{табл.}}$ превышает табличное, т.е. $F > F_{\text{табл.}}$, то гипотеза о равенстве коэффициента множественной корреляции нулю отвергается и связь считается существенной.

Пример 9. Дано: $R = 0,75$, $p = 4$, $n = 16$. Определить существенность связи.

Решение. Вычислим значение F -критерия по формуле (10.32):

$$F = \frac{0,5625 \cdot (16 - 4 - 1)}{4 \cdot (1 - 0,5625)} = 3,53.$$

Для $k_1 = 4$, $k_2 = 16 - 4 - 1 = 11$ и уровне значимости $\alpha = 0,95$ находим $F_{\text{табл.}} = 3,36$.

Поскольку расчетное значение F -критерия превышает табличное, можно сделать вывод о существенности связи.

Множественная линейная регрессионная зависимость. Если факторы-аргументы не являются случайными величинами, то коэффициенты корреляции не могут быть использованы при построении уравнения регрессии, так как не могут быть интерпретированы как показатели тесноты связи.

Существенность вводимых факторов в случае линейной множественной регрессии может быть проверена одновременно с существенностью коэффициентов регрессии.

Для проверки существенности вычисляется отношение

$$t_i = \frac{a_i}{\sigma_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10.33)$$

где a_i — коэффициент множественной регрессии; σ_i — среднее квадратическое отклонение этого коэффициента.

Если $t_i < t_{\text{табл.}}$, взятого по таблицам t -распределения Стьюдента, то с заданной вероятностью не отвергается гипотеза, что соответствующий коэффициент регрессии a_i в генеральной совокупности (который не известен и который нужно оценить по данным выборки) равняется нулю. При этом i -й фактор в таком случае признается несущественным для построенного уравнения регрессии.

При проведении исследования может оказаться, что вычисленные значения t для нескольких факторов не превышают $t_{\text{табл.}}$. В этом случае несущественные факторы из уравнения регрессии исключаются поочередно, начиная с наименьшего по абсолютной величине t . Фактор, соответствующий наименьшему значению t , из уравнения регрессии исключается, и заново решается система нормальных уравнений. Затем вновь вычисляются значения t для всех оставшихся в уравнении коэффициентов, определяется наименьшее значение t , которое сопоставляется с $t_{\text{табл.}}$. Если окажется, что $t_{\min} < t_{\text{табл.}}$, то фактор, имеющий $t_{\min}$, исключается.

Процесс исключения коэффициентов повторяется до тех пор, пока не будет выполняться соотношение $t_{\min} \geq t_{\text{табл.}}$. В этом случае все оставшиеся в уравнении факторы существенны.

Проводить исключение из уравнения регрессии одновременно нескольких факторов, имеющих $t < t_{\text{табл.}}$, нецелесообразно, так как после исключения одного несущественного фактора меняются коэффициенты регрессии других факторов, и тогда значения t и несущественные факторы после пересчета могут оказаться существенными.

Аналогичный подход осуществляется и при наличии корреляционной зависимости, но на последней стадии отбора существенных факторов. Проверка значимости уравнения регрессии осуществляется по критерию Фишера

$$F = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\text{ост}}^2} \quad (10.34)$$

с числом степеней свободы $k_1 = n - 1$ и $k_2 = n - p - 1$, где

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - y)^2}{n - 1}; \quad (10.35)$$

$$\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p - 1}; \quad (10.36)$$

y_i — значения y , полученные по данным наблюдений; $\hat{y}_i$ — расчетные значения y , полученные для соответствующих значений $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Полученное значение F сравнивается с табличным значением $F_{\text{табл.}}$, соответствующим выбранному уровню значимости. Если окажется, что $F > F_{\text{табл.}}$,

гипотеза о несущественном влиянии $x_1, x_2, \dots, x_p$ на y отвергается. Если же $F < F_{\text{табл}}$, то следует ввести некоторые другие факторы, влияющие на показатель y , или перейти к построению нелинейной множественной регрессии.

При построении регрессионного уравнения существенную информацию о модели может дать рассмотрение остатков ε .

Обычно точное распределение остатков ε неизвестно, но можно оценить эту величину по отклонениям фактических значений y_i от расчетных $\hat{y}_i$

$$y_1 - \hat{y}_1 = \varepsilon_1, \quad y_2 - \hat{y}_2 = \varepsilon_2, \quad \dots y_n - \hat{y}_n = \varepsilon_n.$$

При построении регрессионного уравнения следует проверять автокорреляцию отклонений. Под *автокорреляцией* последовательности значений какого-либо фактора понимается корреляция между членами этой последовательности, передвинутой на несколько единиц, например, корреляция между рядами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ и $\varepsilon_{L+1}, \varepsilon_{L+2}, \dots, \varepsilon_{L+n}$, где L — положительное число, называемое *лагом*. В экономике часто исследуется случай, когда $L = 1$, т.е. рассматривается корреляция между рядами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ и $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n+1}$.

Автокорреляция обычно вычисляется на основе некоторого объема исходных данных n , в которых наблюдения с номерами $n+1, n+2, \dots, n+L$ отсутствуют и их заменяют первыми результатами наблюдений, т.е. за последним членом x_n снова следуют члены $x_1, x_2, \dots$.

Например, для лага $L = 1$ циклическим коэффициентом автокорреляции будет коэффициент корреляции между рядами $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ и $x_2, x_3, \dots, x_n, x_1$.

Наиболее распространенным методом проверки наличия автокорреляции рядов является критерий Дарбина — Уотсона.

Для проверки автокорреляции вычисляют величину

$$d = \frac{\sum (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum \varepsilon_t^2}. \quad (10.37)$$

Расчетное значение d сравнивается с табличным. Таблица значений критерия с уровнем значимости $\alpha = 0,05$ дана в приложении 9. В таблице указаны два значения критерия — d_1 и d_2 , а также k и n , причем d_1, d_2 — соответственно нижняя и верхняя границы теоретических значений, k — число факторов в модели, n — число уровней временного ряда. При сравнении расчетного значения с табличным возможны случаи:

- если $d < d_1$, то можно сделать вывод о наличии автокорреляции;
- если $d > d_2$, то можно сделать вывод об отсутствии автокорреляции;
- если $d_1 \leq d \leq d_2$, то необходимо дальнейшее исследование автокорреляции.

В таблицах даны критические значения d_1, d_2 , для уровней значимости 1%, 2,5% и 5%.

Чтобы проверить значимость отрицательной автокорреляции, нужно вычислить величину $4 - d$. Затем проверка осуществляется аналогично тому, как и в случае положительной автокорреляции.

Стандартизованное уравнение линейной множественной регрессии. Если коэффициенты линейной множественной регрессии рассматривать в качестве показателей влияния факторов, то следует иметь в виду, что коэффициенты регрессии в уравнении (10.27) между собой прямо не сравнимы. Их численные значения зависят от выбранных единиц измерения каждого фактора. Чтобы коэффициенты регрессии стали сравнимы, приведем коэффициенты регрессии к *стандартизованному масштабу*.

Для этого все переменные выражают в безразмерных, стандартизованных, единицах измерения при помощи следующих соотношений:

$$t_y = \frac{\bar{y} - y}{\sigma_y}, \quad t_{xi} = \frac{\bar{x}_i - x_i}{\sigma_{xi}}, \quad (10.38)$$

где y и x_i — значения соответствующих факторов в исходном (натуральном) масштабе; $\bar{y}$ и $\bar{x}_i$, — средние значения факторов y и x_i ; t_y и t_{xi} — соответствующие значения фактора в стандартизованном масштабе.

Свободный член a_0 в *стандартизованном уравнении* линейной множественной регрессии отсутствует, т.е. уравнение (10.27) можно записать в виде

$$t_y = \beta_1 t_{x1} + \beta_2 t_{x2} + \dots + \beta_p t_{xp}. \quad (10.39)$$

Все переменные уравнения выражены в сравнимых единицах измерения. Коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ называются *коэффициентами регрессии в стандартизованном масштабе*. Для их определения необязательно решать снова систему нормальных уравнений. Переход от коэффициентов a_i к β_i ($i = \overline{1, n}$) и обратно может осуществляться по формуле

$$\beta_i = a_i \frac{\sigma_{xi}}{\sigma_y}, \quad (10.40)$$

где σ_{xi}, σ_y — средние квадратические отклонения.

Пример 10. Дано регрессионное уравнение $y = 2 + 4x_1 + 6x_2 + 14x_3$, $\sigma_{x1} = 4$, $\sigma_{x2} = 2$, $\sigma_{x3} = 6$, $\sigma_y = 4$. Требуется записать его в стандартизованном масштабе. Сравнить влияние рассматриваемых факторов на фактор y .

Решение. Вычислим коэффициенты регрессии уравнения в стандартизованном масштабе по формуле (10.40):

$$\beta_1 = a_1 \frac{\sigma_{x1}}{\sigma_y} = 4 \cdot \frac{4}{4} = 4, \quad \beta_2 = a_2 \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_y} = 6 \cdot \frac{2}{4} = 3, \quad \beta_3 = a_3 \frac{\sigma_{x3}}{\sigma_y} = 14 \cdot \frac{6}{4} = 21.$$

Таким образом, уравнение в стандартизованном масштабе имеет вид:

$$t_y = 4t_{x1} + 3t_{x2} + 21t_{x3}.$$

Коэффициенты регрессии 4, 3, 21 показывают влияние изменения каждой переменной на изменение фактора y . Все коэффициенты выражены в сравнимых единицах измерения. Чем больше $|\beta_i|$, тем сильнее влияет соответствующий факторный показатель на результативный. Таким образом, наибольшее влияние на y имеет фактор x_3 , факторы x_1 и x_2 оказывают примерно одинаковое влияние.

На практике часто используют уравнение регрессии в стандартизованном масштабе в виде

$$Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \beta_{p+1} t, \quad (10.41)$$

где Y , x_i — факторы y и x_i в стандартизованном масштабе.

Пример 11. Имеются данные по комплектующим материалам, трудовым ресурсам и средствам производства фирмы, необходимым для изготовления изделия. На основе всестороннего качественного анализа имеющейся исходной информации и матрицы парных коэффициентов корреляции были отобраны следующие факторы, которые необходимо включить в уравнение регрессии:

y — реализация изделия, ден. ед;

x_1 — расход комплектующих материалов, ед.;

x_2 — производственные издержки, ден. ед.;

x_3 — материальные оборотные средства, ден. ед.;

x_4 — фондовооруженность труда, ден. ед.

В уравнение введен фактор времени с целью уменьшения автокорреляции. По уравнению регрессии следует проверить значимость модели.

Решение. Решая задачу, например, с помощью компьютерной программы, получим уравнение регрессии

$$Y = 70,6 + 1,19x_1 - 0,89x_2 + 1,43x_3 + 0,18x_4 - 2,77t. \quad (10.42)$$

Проверим значимость найденной модели. Выдвигаем гипотезу H_0 о том, что модель незначима. Конкурирующая гипотеза H_1 заключается в том, что модель значима.

Случайная величина F имеет распределение Фишера — Снедекора с $k_1 = n - 1$ и $k_2 = n - p - 1$ степенями свободы. Расчетное значение случайной величины $F_{\text{расч}} = 40,64$, критическое $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2) = F_{\text{кр}}(0,01, 13, 8) = 5,6$ найдено по таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора.

Поскольку $F_{\text{расч}} > F_{\text{кр}}$, нулевая гипотеза отвергается, принимается конкурирующая гипотеза.

При уровне значимости 1% найденная модель значима.

Дадим экономическую интерпретацию коэффициентов регрессии. Коэффициент $a_1 = 1,19$ показывает, что с увеличением расхода комплектующих материалов на одну единицу реализация изделия увеличится в среднем на 1,19 ден. ед. Коэффициент $a_2 = -0,89$ показывает, что с увеличением производственных издержек на 1 ден. ед. реализация изделия снижается в среднем на 0,89 ден. ед. Аналогично экономически интерпретируются другие коэффициенты.

Многофакторная регрессионная модель в стандартизованном масштабе имеет вид:

$$Y = 0,135x_1 - 1,276x_2 + 2,134x_3 + 0,139x_4 - 0,693t.$$

Сравнивая коэффициенты по абсолютной величине, следует отметить, что наибольшее влияние на результативный показатель (реализация изделия) оказывают материальные оборотные средства x_3 , затем производственные издержки x_2 , приблизительно одинаковое влияние оказывают такие факторы, как расход комплектующих материалов x_1 и фондовооруженность x_4 .

При экономическом анализе результатов решения задачи необходимо проанализировать совокупный коэффициент корреляции, составляющий высокую величину, равную 0,981.

Проверим значимость коэффициентов корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу $H_0: R_{\text{ген}} = 0$ при конкурирующей гипотезе $R_{\text{ген}} \neq 0$.

Проверим гипотезу с помощью t -статистики

$$t = \frac{R_B \sqrt{n-p-1}}{\sqrt{1-R_B^2}}, \quad (10.43)$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k = n - p - 1$ степенями свободы. Вычисления дают: $t_{\text{расч}} = 14,2$. При уровне значимости $\alpha = 0,01$ находим критическое значение $t_{\text{кр}}(\alpha, k) = t_{\text{кр}}(0,01, 8) = 3,36$. Так как $t_{\text{расч}} > t_{\text{кр}}$, нулевая гипотеза отвергается, принимается конкурирующая гипотеза.

Коэффициент корреляции близок к единице, поэтому связь между рассматриваемыми показателями тесная. Чтобы дать количественную оценку тесноты этой связи, найдем коэффициент детерминации: $R^2 \cdot 100\% = 96,2\%$. Найденный коэффициент показывает, на сколько процентов в среднем вариация результативного показателя определяется вариацией всех факторных признаков, включенных в модель. Таким образом, колебания реализации изделия в среднем на 96,2% объясняются совокупным влиянием факторов, включенных в модель.

Упражнения

По 15 показателям в таблице заданы значения двух признаков x и y . Для случая линейной зависимости между признаками оценить коэффициенты парной регрессии, рассчитать линейный коэффициент парной корреляции, коэффициент детерминации, среднюю ошибку аппроксимации.

10.1.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	8,2	11,3	14,2	16,7	19,6	23,2	26,4	28,7	32,3	35,4	37,6	40,5	43,6	47,3	51,4

10.2.

x	2,1	2,9	3,8	5,1	6,2	6,9	7,7	9,3	10,2	10,9	11,8	13,3	14,2	15,3	16,2
y	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13

10.3.

x	2,1	2,8	4,2	5,1	5,8	6,9	8,3	8,8	10,3	11,2	12,3	13,1	14,3	15,2	16,3
y	3,8	6,7	10,1	13,2	16,3	18,7	21,6	25,2	27,7	30,6	33,8	36,5	39,7	43,2	45,8

10.4. Данные результатов наблюдений представлены в табл. 10.13. Определить методом наименьших квадратов параметры a_0 , a_1 , a_2 зависимости вида $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Таблица 10.13

x	-2	-1	0	1	2
y	7,5	4,0	3,0	5,2	10,0

10.5. Данные результатов наблюдений представлены в табл. 10.14. Определить методом наименьших квадратов параметры a , b зависимости вида $y = a + b/x$.

Таблица 10.14

x	-2	-1	0,5	1	2
y	7,0	9,0	5,0	1,5	3,5

10.6. Данные результатов наблюдений представлены в табл. 10.15. Определить методом наименьших квадратов параметры a , b зависимости вида $y = ax^b$.

Таблица 10.15

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	6	17

10.7. По данным упражнения 10.4 вычислить индекс корреляции и сделать вывод о тесноте связи между заданными величинами X , Y .

10.8. По данным упражнения 10.5 вычислить индекс корреляции и сделать вывод о тесноте связи между заданными величинами X , Y .

10.9. По данным упражнения 10.5 вычислить индекс корреляции и сделать вывод о тесноте связи между заданными величинами X , Y .

Глава 11. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

11.1. Классификация и виды временных рядов

Каким бы видом производства или бизнеса ни занималась фирма, ей придется планировать предпринимательскую деятельность на будущий период. При разработке краткосрочных и долгосрочных планов менеджеры вынуждены прогнозировать будущие значения таких важнейших показателей, как, например, объем продаж, издержки производства, ставки процента и т.д. Широкому внедрению методов прогнозирования способствовало развитие персональных компьютеров и статистических программных пакетов.

Под *прогнозом* понимается научно обоснованное описание возможных состояний систем в будущем и сроков достижения этого состояния, а процесс разработки прогнозов называют *прогнозированием*.

11.1.1. Классификация экономических прогнозов

В зависимости от объектов прогнозирования прогнозы разделяют на научно-технические, экономические, социальные и т.д.

В зависимости от масштабности объекта прогнозирования экономические прогнозы могут охватывать все уровни: от прогнозов отдельных предприятий, производств (микроуровни) до развития отрасли в масштабе страны (макроуровня) или закономерностей мирового масштаба (глобального уровня).

Временем упреждения при прогнозировании называют отрезок времени от момента, для которого имеются последние данные об изучаемом объекте, до момента, к которому относится прогноз.

По длительности времени упреждения различают следующие виды прогнозов:

- *оперативные* с периодом упреждения до одного месяца;
- *краткосрочные* — до одного года;
- *среднесрочные* — от одного года до пяти лет;
- *долгосрочные* с периодом упреждения более пяти лет.

Наибольший практический интерес представляют оперативные и краткосрочные прогнозы.

Прогнозирование экономических процессов состоит из следующих этапов:

- постановка задачи и сбор необходимой информации для прогнозирования;
- первичная обработка исходной информации;
- определение возможных моделей прогнозирования;

- оценка параметров рассматриваемых моделей;
- проверка адекватности выбранных моделей;
- расчет характеристик моделей.

11.1.2. Виды временных рядов

Основные понятия и определения. Происходящие в экономических системах процессы в основном проявляются как ряд расположенных в хронологическом порядке значений определенного показателя, который в своих изменениях отражает развитие изучаемого явления.

Ряд наблюдений за значениями определенного показателя, упорядоченный в зависимости от возрастающих или убывающих значений другого показателя, называют *динамическим рядом, временным рядом, рядом динамики*. Отдельные наблюдения временного ряда называются *уровнями* этого ряда.

Временные ряды бывают моментные, интервальные и производные. *Моментные ряды* характеризуют значения показателя на определенные моменты времени. Пример такого ряда представлен в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Дата	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
Численность работников, чел.	283	287	295	298	308	312

Интервальные ряды характеризуют значения показателя за определенные интервалы времени (табл. 11.2).

Таблица 11.2

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Фонд заработной платы, ден. ед.	1520	1590	1650	1710	1780	1890

Производные ряды получаются из средних или относительных величин показателя (табл. 11.3).

Таблица 11.3

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Средняя заработная плата, ден. ед.	5400	5440	5430	5470	5475	5500

Уровни ряда могут иметь детерминированные или случайные значения. Ряд последовательных данных о количестве дней в месяце, квартале, году являются примерами рядов с детерминированными значениями.

Прогнозированию подвергаются ряды со случайными значениями уровней. Каждый показатель таких рядов может иметь дискретную или непрерывную величину.

Требования к исходной информации. Важное значение для прогнозирования имеет выбор интервалов между соседними уровнями ряда. При слишком большом интервале времени могут быть упущены некоторые закономерности в динамике показателя, при слишком малом — увеличивается объем вычислений, могут появляться ненужные детали в динамике процесса. Поэтому выбор интервала времени между уровнями ряда должен решаться конкретно для каждого процесса, причем удобнее иметь равноотстоящие друг от друга уровни.

Важным условием правильного отражения временным рядом реального процесса развития является *сопоставимость уровней ряда*. Несопоставимость чаще всего встречается в стоимостных характеристиках, изменениях цен, территориальных изменениях, укрупнении предприятий и др. Для несопоставимых величин показателя неправомерно проводить прогнозирование.

Для успешного изучения динамики процесса необходимо, чтобы информация была полной, временной ряд имел достаточную длину, отсутствовали пропущенные наблюдения.

Уровни временных рядов могут иметь аномальные значения. Появление таких значений может быть вызвано ошибками при сборе, записи или передаче информации. Это ошибки технического порядка или ошибки первого рода. Однако аномальные значения могут отражать реальные процессы, например скачок курса доллара и др. Такие аномальные значения относят к ошибкам второго рода, они устранению не подлежат.

Для выявления аномальных уровней временных рядов можно использовать метод Ирвина.

Метод предполагает использование следующей формулы:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}, \quad t = \overline{1, n},$$

где σ_y — среднеквадратическое отклонение временного ряда $y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n$;

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \bar{y})^2}{n-1}}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_t}{n}.$$

Расчетные значения $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ сравниваются с табличными значениями критерия Ирвина λ_α , и если оказываются больше табличных, то соответствующее значение y_t уровня ряда считается аномальным.

Значения критерия Ирвина для уровня значимости $\alpha = 0,05$ приведены в табл. 11.4.

После выявления аномальных уровней необходимо определение причин их возникновения. Если они вызваны ошибками технического порядка, то

Таблица 11.4

n	2	3	10	20	30	50	100
λ_α	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

они устраняются заменой аномальных уровней соответствующими значениями по кривой, аппроксимирующей временной ряд, или заменой уровней средней арифметической двух соседних уровней ряда.

Ошибки, возникающие из-за воздействия факторов, имеющих объективный характер, устранению не подлежат.

Пример 1. Временной ряд задан в табличной форме (табл. 11.5). Проверить наличие аномальных значений.

Таблица 11.5

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
y_t	1,6	1,9	2,1	2,4	4,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,8	29,1
$y_t - \bar{y}$	-1,31	-1,01	-0,81	-0,51	1,59	-0,11	0,19	0,39	0,69	0,89	
$(y_t - \bar{y})^2$	1,72	1,02	0,66	0,26	2,53	0,01	0,04	0,15	0,48	0,79	7,66

Решение. Вычисляем значения

$$\bar{y}_t = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{29,1}{10} = 2,91,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{7,66}{9}} = 0,92.$$

Исследуем на аномальные значения точку $t = 2$. Так как

$$\lambda_2 = \frac{|y_2 - y_1|}{\sigma_y} = \frac{1,9 - 1,6}{0,92} = 0,32,$$

а $\lambda_{\text{табл}} = 1,5$ (для $n = 10$), т.е. $\lambda_2 < \lambda_{\text{табл}}$, уровень $t = 2$ — нормальный.

Исследуем на аномальные значения точку $t = 5$. Так как

$$\lambda_5 = \frac{|y_5 - y_4|}{\sigma_y} = \frac{4,5 - 2,4}{0,92} = 2,28,$$

и $\lambda_5 > \lambda_{\text{табл}} = 1,5$, уровень $t = 5$ — аномальный. Если уровень $t = 5$ относится к ошибкам первого рода, то его можно заменить на $y_5 = \frac{2,4 + 4,5}{2} = 3,45$.

Итак, заданные уровни временного ряда являются нормальными, за исключением уровня $t = 5$.

Компоненты временных рядов. Если во временном ряду проявляется длительная тенденция изменения экономического показателя, то в этом случае говорят, что имеет место тренд.

Пусть дан временной ряд $y_t = y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n, t = \overline{1, n}$. Считают, что значения уровней временных рядов экономических показателей складываются из следующих составляющих (компонент): тренда, сезонной, циклической и случайной.

Под *трендом* понимают изменение, определяющее общее направление развития или основную тенденцию временного ряда. Тренд относят к систематической составляющей долговременного действия. Во временных рядах часто происходят регулярные колебания, которые относятся к периодическим составляющим рядов экономических процессов.

Если период колебаний не превышает 1 года, то их называют *сезонными*, более 1 года — *циклическими составляющими*. Чаще всего причиной сезонных колебаний являются природные, климатические условия, причиной циклических — демографические циклы и др.

Тренд, сезонная и циклическая составляющая называются *регулярными*, или *систематическими компонентами временного ряда*. Если из временного ряда удалить регулярную компоненту, то останется *случайная компонента*.

Если временной ряд представлен в виде суммы составляющих компонент, то модель называется *аддитивной*, если в виде произведения, то *мультипликативной* или *смешанного* типа:

$y_t = u_t + s_t + v_t + e_t$ — аддитивная форма;

$y_t = u_t s_t v_t e_t$ — мультипликативная форма;

$y_t = u_t s_t v_t + e_t$ — смешанная форма.

Здесь y_t — уровни временного ряда; u_t — временной тренд; s_t — сезонная компонента; v_t — циклическая составляющая; e_t — случайная компонента.

Проверка гипотезы существования тенденции. Прогнозирование временных рядов целесообразно начинать с построения графика исследуемого показателя. Однако в нем не всегда прослеживается присутствие тренда. Поэтому в этих случаях необходимо выяснить, существует ли тенденция во временном ряду или она отсутствует.

Для временного ряда $y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n$ рассмотрим *критерий «восходящих» и «нисходящих» серий*. Согласно этому критерию тенденция определяется по следующему алгоритму:

1. Для исследуемого временного ряда определяется последовательность знаков δ_t по следующему правилу

$$\delta_t = \begin{cases} +, & y_{t+1} - y_t > 0; \\ -, & y_{t+1} - y_t < 0. \end{cases}$$

При этом, если последующее наблюдение равно предыдущему, то учитывается только одно наблюдение.

2. Подсчитывается число серий $v(n)$. Под *серией* понимается последовательность подряд расположенных плюсов или минусов, причем один плюс или один минус считается серией.

3. Определяется протяженность самой длинной серии $l_{\max}(n)$.

4. По табл. 11.6 находится значение $l(n)$.

Таблица 11.6

Длина ряда n	$n \leq 26$	$26 < n \leq 153$	$153 < n \leq 170$
Значение $l(n)$	5	6	7

5. Гипотеза об отсутствии тренда отвергается с доверительной вероятностью 0,95, если нарушается хотя бы одно из следующих неравенств:

$$v(n) > \left[\frac{2n-1}{3} - 1,96\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right], \quad l_{\max}(n) \leq l(n).$$

Под $[x]$ понимается целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превышающее x (например $[2,4] = 2$).

Пример 2. Дана динамика ежеквартального выпуска продукции фирмы (табл. 11.7) в ден. ед. С помощью критерия «восходящих и нисходящих» серий сделать вывод о присутствии или отсутствии тренда. Доверительную вероятность принять равной 0,95.

Таблица 11.7

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21

Решение. Определим последовательность знаков (табл. 11.8).

Таблица 11.8

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21
δ_t		+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	+

Число серий $v(n) = 11$, протяженность самой длинной серии $l_{\max}(n) = 3$, по таблице $l(n) = 5$. Запишем систему неравенств:

$$11 > \left[\frac{2 \cdot 16 - 1}{3} - 1,96\sqrt{\frac{16 \cdot 16 - 29}{90}} \right], \quad 3 \leq 5,$$

или $11 > 7, 3 \leq 5$. Оба неравенства выполняются, поэтому с доверительной вероятностью 0,95 можно утверждать, что тренд в динамике выпуска продукции фирмы отсутствует.

11.2. Показатели динамики экономических процессов

11.2.1. Основные показатели динамики

Для количественной оценки динамики экономических процессов применяют такие статистические показатели, как *абсолютные приросты, темпы роста и прироста*. Они подразделяются на цепные, базисные и средние.

Если сравнение уровней временного ряда осуществляется с одним и тем же уровнем, принятым за базу, то показатели называются *базисными*. Если сравнение осуществляется с переменной базой и каждый последующий уровень сравнивается с предыдущим, то вычисленные показатели называются *цепными*.

Формулы для вычисления цепных, базисных и средних абсолютных приростов, темпов роста и темпов прироста даны в табл. 11.9. В формулах приняты обозначения: $y_1, y_2, \dots, y_t \dots, y_n$ — уровни временного ряда; n — длина ряда; y_6 — уровень временного ряда, принятый за базу сравнения.

Таблица 11.9

Обозначения	Абсолютный прирост	Темп роста	Темп прироста
Цепной	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	$T_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100\%$	$K_t = T_t - 100\%$
Базисный	$\Delta y_{6t} = y_t - y_6$	$T_{6t} = \frac{y_t}{y_6} \cdot 100\%$	$K_{6t} = T_t - 100\%$
Средний	$\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$	$\overline{T} = \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot 100\%$	$\overline{K} = \overline{T} - 100\%$

Описание динамики ряда средним приростом соответствует его представлению в виде прямой, проходящей через две крайние точки. Для получения прогнозного значения на один шаг вперед достаточно к последнему наблюдению добавить значение среднего абсолютного прироста:

$$y_{n+1} = y_n + \overline{\Delta y}, \tag{11.1}$$

где y_n — значение показателя в n -й точке временного ряда; y_{n+1} — прогнозное значение показателя в $(n + 1)$ -й точке; $\overline{\Delta y}$ — значение среднего прироста временного ряда.

Получение прогнозного значения по формуле (11.1) корректно, если динамика ряда близка к линейной. На такой равномерный характер развития динамики указывают примерно одинаковые цепные абсолютные приросты.

Использование среднего темпа роста (среднего темпа прироста) для описания динамики развития ряда соответствует его представлению в виде показательной или экспоненциальной кривой, проведенной через две крайние точки,

и характерно для процессов, изменение динамики которых происходит с постоянным темпом роста. Прогнозное значение на i шагов вперед определяется по формуле

$$y_{n+i} = y_n T^i, \quad (11.2)$$

где y_{n+i} — прогнозная оценка значения показателя в точке $n + i$; T — средний темп роста, выраженный в относительных величинах.

Недостатком прогнозирования с использованием среднего прироста и среднего темпа роста является то, что они учитывают начальный и конечный уровни ряда, исключая влияния промежуточных уровней. Тем не менее они используются как простейшие, приближенные способы прогнозирования.

Пример 3. Ежеквартальная динамика фонда заработной платы работников фирмы в денежных единицах представлена в табл. 11.10. Обосновать правомерность использования среднего прироста для определения прогнозного значения фонда заработной платы в шестом квартале.

Таблица 11.10

t	1	2	3	4	5
y_t	252	253	254,2	255,3	256,5

Решение. Найдем цепные абсолютные приросты:

$$\Delta y_2 = y_2 - y_1 = 253 - 252 = 1,$$

$$\Delta y_3 = y_3 - y_2 = 254,2 - 253 = 1,2,$$

$$\Delta y_4 = y_4 - y_3 = 255,3 - 254,2 = 1,1,$$

$$\Delta y_5 = y_5 - y_4 = 256,5 - 255,3 = 1,2.$$

Цепные абсолютные приросты изменяются от 1 до 1,2, их изменения примерно одинаковы, что свидетельствует о близости ежеквартальной динамики фонда заработной платы фирмы к линейной. Поэтому правомерно определить прогнозное значение y'_6 помощью среднего прироста $\overline{\Delta y}$:

$$\overline{\Delta y} = \frac{y_5 - y_1}{n - 1} = \frac{256,5 - 252}{5 - 1} = 1,125,$$

$$y'_6 = y_5 + \Delta y = 256,5 + 1,125 = 257,625.$$

Пример 4. Изменение ежеквартальной динамики фонда заработной платы работников фирмы происходило примерно с постоянным темпом роста в течение пяти кварталов. Фонд заработной платы в I квартале составлял 252 ден. ед., а в V квартале — 256,5 ден. ед.

Определить прогноз фонда заработной платы работников фирмы в VI квартале, используя средний темп роста.

Решение. По условию изменение фонда заработной платы происходило примерно с постоянным темпом роста в течение пяти кварталов. Поэтому правомерно использовать средний темп роста для расчета прогноза фонда в VI квартале.

Средний темп роста составит:

$$\bar{T} = \left(\frac{y_n}{y_1} \right)^{1/(n-1)} \cdot 100\% = \left(\frac{y_5}{y_1} \right)^{1/4} \cdot 100\% = \left(\frac{256,5}{252} \right)^{1/4} \cdot 100\% = 100,44\%.$$

Таким образом, прогноз фонда заработной платы сотрудников фирмы составит:

$$y'_{VI} = y_V \cdot T = 256,5 \cdot 1,0044 = 257,6 \text{ (ден. ед.)}.$$

11.2.2. Сглаживание временных рядов с помощью скользящей средней

Основные понятия. Предварительный анализ временных рядов экономических показателей заключается в выявлении аномальных значений уровней ряда, которые не соответствуют возможностям рассматриваемой экономической системы, а также в определении наличия тренда.

Наиболее распространенным приемом для устранения аномальных значений показателей и отсутствия тенденции временного ряда является *сглаживание временного ряда*. При этом производится замена фактических уровней временного ряда расчетными, что способствует более четкому проявлению тенденции.

Скользящие средние позволяют сгладить случайные и периодические колебания временного ряда.

Сглаживание по простой скользящей средней. Наиболее распространенной процедурой сглаживания является *метод простой скользящей средней*. Сначала для временного ряда определяется интервал сглаживания g . Если необходимо сгладить мелкие колебания, то интервал сглаживания берут по возможности большим; если нужно сохранить более мелкие колебания, то интервал сглаживания уменьшают. Для первых g уровней временного ряда вычисляется их среднее арифметическое значение. Это будет сглаженное значение уровня ряда, находящегося в середине интервала сглаживания. Затем интервал сглаживания сдвигается на один уровень вправо, повторяется вычисление средней арифметической и т.д. В результате такой процедуры получим ряд сглаженных значений, при этом в зависимости от g первые и последние уровни теряются.

Удобно длину интервала сглаживания g брать в виде нечетного числа, в этом случае расчетное значение скользящей средней будет приходиться на средний интервал ряда.

Например, для интервала $g = 3$ сглаженные уровни рассчитываются по формуле

$$y_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}.$$

Чтобы не потерять первый и последний уровни ряда, их можно вычислить по формулам

$$y_1 = \frac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6}, \quad y_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6}.$$

Метод простой скользящей средней дает хорошие результаты в динамических рядах с линейной тенденцией развития.

Сглаживание по взвешенной скользящей средней. Для рядов с нелинейной тенденцией развития необходимо применять *метод взвешенной скользящей средней*. Этот метод отличается от метода простой скользящей средней тем, что уровни, входящие в интервал сглаживания, суммируются с разными весами. Для полиномов 2-го и 3-го порядка по пятичленной взвешенной скользящей средней центральное значение интервала определяется по формуле

$$y_t = \frac{-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}}{35}. \quad (11.3)$$

Ниже представлены весовые коэффициенты при сглаживании по полиномам 2-го и 3-го порядка в зависимости от длины интервала сглаживания:

Длина интервала сглаживания	Весовые коэффициенты
5	$\frac{1}{35}(-3, +12, +17)$
7	$\frac{1}{21}(-2, +3, +6, +7)$
9	$\frac{1}{231}(-21, +14, +39, +54, +59)$

Пример 5. По данным динамики урожайности за 10 лет (табл. 11.11), рассчитать:

- трех-, пятилетние скользящие средние простые;
- пятилетние скользящие средние взвешенные.

Сравнить результаты расчетов.

Таблица 11.11

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	21,2	18,1	8,7	16,3	17,3	20,9	15,4	19,7	21,7

Решение. Вычислим трехлетние скользящие средние простые:

$$y_2 = \frac{16,3 + 21,2 + 18,1}{3} = 18,5, \quad y_3 = \frac{21,2 + 18,1 + 8,7}{3} = 16,0$$

и т.д. Найдем пятилетние скользящие средние простые:

$$y_3 = \frac{16,3 + 21,2 + 18,1 + 8,7 + 16,3}{5} = 16,1,$$

$$y_4 = \frac{21,2 + 18,1 + 8,7 + 16,3 + 17,3}{5} = 16,3$$

и т.д. Определим пятилетние скользящие средние взвешенные:

$$y_3 = \frac{-3 \cdot 16,3 + 12 \cdot 21,2 + 17 \cdot 18,1 + 12 \cdot 8,7 - 3 \cdot 16,3}{35} = 16,2,$$

$$y_4 = \frac{-3 \cdot 21,2 + 12 \cdot 18,1 + 17 \cdot 8,7 + 12 \cdot 16,3 - 3 \cdot 17,3}{35} = 12,7$$

и т.д. Вычисленные значения занесем в табл. 11.12.

Таблица 11.12

t	y_t	Трехлетняя скользящая простая	Пятилетняя скользящая простая	Пятилетняя скользящая взвешенная
1	16,3	—	—	—
2	21,2	18,5	—	—
3	18,1	16,0	16,1	16,2
4	8,7	14,4	16,3	12,7
5	16,3	14,1	16,3	13,5
6	17,3	18,2	15,7	19,1
7	20,9	17,9	17,9	18,3
8	15,4	18,7	19,0	18,1
9	19,7	18,9	—	—
10	21,7	—	—	—

Сравнивая значения y_t трех- и пятилетних скользящих простых, видно, что более гладкой является пятилетняя скользящая.

Сравнивая значения y_t пятилетних скользящих простых и взвешенных, видно, что более гладкой является скользящая простая, но скользящая взвешенная более близка к исходной.

Экспоненциальное сглаживание. Выравнивание временных рядов может быть произведено *методом экспоненциального сглаживания*. Суть метода заключается в том, что в процедуре нахождения сглаженного уровня используются значения только предшествующих уровней ряда, взятые с определенным весом, причем вес наблюдения уменьшается по мере удаления его от момента времени, для которого определяется сглаженное значение уровня ряда. Если для исходного временного ряда $y_1, y_2, \dots, y_n$ соответствующие сглаженные значения

уровней обозначить S_t , $t = \overline{1, n}$, то экспоненциальное сглаживание производится по рекуррентному соотношению:

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1},$$

где α — параметр сглаживания, $0 < \alpha < 1$, величина $1 - \alpha$ называется коэффициентом дисконтирования.

Используя рекуррентное соотношение для всех уровней ряда, начиная с первого и кончая моментом уровня t , можно получить, что экспоненциальная средняя, т.е. сглаженное данным методом значение уровня ряда, является взвешенной средней всех предшествующих уровней:

$$S_t = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \alpha)^i y_{t-i} + (1 - \alpha)^t S_0.$$

Например, $\alpha = 0,2$, тогда вес текущего наблюдения y_t равен 0,2. Вес предыдущего уровня y_{t-1} будет соответствовать $\alpha(1 - \alpha) = 0,2(1 - 0,2) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$. Для уровня y_{t-2} вес составит $\alpha(1 - \alpha)^2 = 0,2 \cdot 0,64 = 0,128$ и т.д.

Обычно во временных рядах экономических задач величину параметра сглаживания выбирают в интервале от 0,1 до 0,3.

Начальный параметр S_0 принимают равным значению первого уровня ряда y_1 или равным средней арифметической нескольких первых членов ряда, например y_1, y_2, y_3 :

$$S_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Указанный порядок выбора величины S_0 обеспечивает хорошее согласование сглаженного и исходного временных рядов для первых уровней. Если же при подходе к правому концу ряда сглаженные значения начинают значительно отличаться от соответствующих значений исходного ряда, то целесообразно перейти на другой параметр сглаживания α .

Пример 6. В табл. 11.13 приведены численность преподавателей высших учебных заведений РФ (тыс. человек) по годам. Провести сглаживание временного ряда с использованием экспоненциальной средней, приняв параметр сглаживания $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,3$. По результатам расчетов определить, какой из сглаженных временных рядов носит более гладкий характер.

Таблица 11.13

Год	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
y_t	233,5	239,9	239,8	261,9	261,8	268,7	260,7	298,6

Решение. Рассмотрим случай $\alpha = 0,1$:

$$S_0 = \frac{233,5 + 239,9 + 239,8}{3} = 237,7,$$

$$S_1 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)S_0 = 0,1 \cdot 233,5 + 0,9 \cdot 237,7 = 237,3,$$

$$S_2 = \alpha y_2 + (1 - \alpha)S_1 = 0,1 \cdot 239,9 + 0,9 \cdot 237,3 = 237,6,$$

$$S_3 = \alpha y_3 + (1 - \alpha)S_2 = 0,1 \cdot 239,8 + 0,9 \cdot 237,6 = 237,8$$

и т.д. Для случая $\alpha = 0,3$:

$$S_1 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)S_0 = 0,3 \cdot 233,5 + 0,7 \cdot 237,7 = 233,6,$$

$$S_2 = \alpha y_2 + (1 - \alpha)S_1 = 0,3 \cdot 239,9 + 0,7 \cdot 233,6 = 235,5,$$

$$S_3 = \alpha y_3 + (1 - \alpha)S_2 = 0,3 \cdot 239,8 + 0,7 \cdot 235,5 = 236,8$$

и т.д.

Из проведенных расчетов можно заключить, что при $\alpha = 0,1$ временной ряд имеет более гладкий характер, так как в этом случае в наибольшей степени поглощаются случайные колебания временного ряда.

11.2.3. Применение моделей кривых роста

Комплекс аналитических методов выравнивания сводится к выбору конкретных кривых роста и определению их параметров. Под *кривой роста* будем понимать некоторую функцию, аппроксимирующую заданный динамический ряд.

Разработка прогноза с использованием кривых роста включает следующие этапы:

- выбор одной или нескольких кривых, форма которых соответствует динамике временного ряда;
- оценка параметров выбранных кривых;
- проверка адекватности выбранных кривых прогнозируемому процессу и окончательный выбор кривой;
- расчет точечного и интервального прогнозов.

Кривые роста обычно выбираются из трех классов функций.

К первому классу относятся кривые, которые используются для описания процессов с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста.

Ко второму классу относятся кривые, имеющие предел роста в исследуемом периоде. Такие кривые называют *кривыми насыщения*.

Если кривые насыщения имеют точки перегиба, то они относятся к кривым третьего класса, их называют *S-образными кривыми*.

Среди кривых роста первого типа следует выделить класс полиномов

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

Параметр a_0 является начальным уровнем ряда при $t = 0$, a_1 называют линейным приростом, a_2 — ускорением роста, a_3 — изменением ускорения роста.

В экономических исследованиях в большинстве случаев применяются полиномы не выше третьего порядка.

Полином первой степени

$$y_t = a_0 + a_1 t$$

на графике (рис. 11.1) изображается в виде прямой и используется для описания процессов, развивающихся во времени равномерно.

Полином второй степени

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

на графике (рис. 11.2) изображается в виде параболы и применяется в тех случаях, когда процесс развивается равноускоренно. Если $a_2 > 0$, то ветви параболы направлены вверх, в случае $a_2 < 0$ — вниз.

Полином третьей степени

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

У этого полинома (рис. 11.3) знак прироста ординат может изменяться один или два раза.

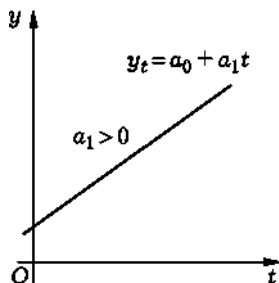


Рис. 11.1

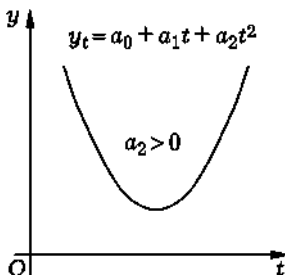


Рис. 11.2

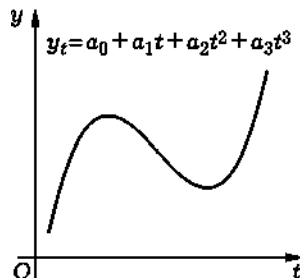


Рис. 11.3

Оценки параметров полиномов определяются методом наименьших квадратов, согласно которому нормальные уравнения для определения коэффициентов прямой имеют вид:

$$\begin{cases} \sum y_t = a_0 n + a_1 \sum t, \\ \sum y_t \cdot t = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2. \end{cases}$$

Решение системы, т.е. нахождение коэффициентов системы a_0 и a_1 , производится по формулам Крамера.

Систему нормальных уравнений можно упростить и уменьшить абсолютные значения величин, если перенести начало координат в середину ряда динамики. Если до переноса начала координат $t = 1, 2, 3, \dots$, то после переноса:

- для четного числа членов $t = \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots$;
- для нечетного числа членов $t = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

В этом случае коэффициенты прямой находятся из выражений:

$$a_0 = \frac{\sum y_t}{n}; \quad a_1 = \frac{\sum y_t \cdot t}{\sum t^2}.$$

Аналогично определяются коэффициенты полинома второй степени (параболы), которые после переноса начала координат в середину ряда динамики имеют вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum y_t}{n} - \frac{\sum t^2}{n} \frac{n \sum y_t \cdot t^2 - \sum t^2 \sum y_t}{n \sum t^4 - (\sum t^2)^2}; \\ a_1 &= \frac{\sum y_t \cdot t}{\sum t^2}; \quad a_2 = \frac{n \sum y_t \cdot t^2 - \sum t^2 \sum y_t}{n \sum t^4 - (\sum t^2)^2}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Показательная кривая (рис. 11.4) имеет вид:

$$y_t = ab^t, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Показательная кривая растет с ростом t , если $b > 1$, и падает, если $b < 1$. Параметр a кривой характеризует начальные условия, а параметр b — постоянный темп роста. Прологарифмировав уравнение кривой, получим:

$$\ln y_t = \ln a + t \ln b.$$

Обозначим $A = \ln a$, $B = \ln b$, тогда $\ln y_t = A + tB$. Для оценивания неизвестных параметров можно использовать систему нормальных уравнений для прямой и найти параметры A и B . Зная значения $A = \ln a$ и $B = \ln b$, с помощью потенцирования определим значения a и b .

Следует иметь в виду, что полученные таким образом оценки параметров показательной кривой оказываются смещенными, в связи тем что в расчете участвуют не исходные данные, а их логарифмы. Причем смещение будет тем значительнее, чем больше разность между соседними уровнями заданного ряда.

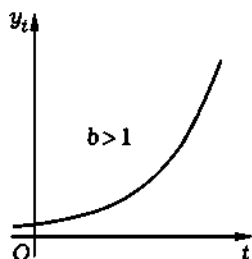


Рис. 11.4

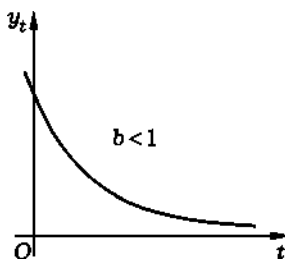
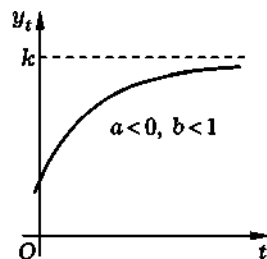


Рис. 11.5



Рассмотренные типы кривых используются для описания монотонно возрастающих или убывающих процессов без насыщения. Примером кривой с насыщением является модифицированная экспонента (рис. 11.5):

$$y_t = k + ab^t, \quad b < 1,$$

где $y = k$ — горизонтальная асимптота.

Коэффициент k может быть определен исходя из свойств прогнозируемого процесса или задан экспертным путем. В этом случае параметры кривой могут быть определены с помощью метода наименьших квадратов после приведения уравнения к линейному виду:

$$y_t - k_1 = ab^t,$$

где k_1 — заданное значение асимптоты.

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\ln |y_t - k_1| = \ln a + t \ln b.$$

Используя систему нормальных уравнений, можно найти параметры $\ln a$ и $\ln b$, потенцируя которые, определим a и b .

Если параметр a отрицателен, то асимптота расположена выше кривой. В экономических процессах чаще всего используется случай, когда $a < 0$, $b < 1$. При этом рост уровней ряда замедляется и стремится к некоторому пределу.

Наиболее известными из S-образных кривых являются кривая Гомперца (рис. 11.6) и логистическая кривая (кривая Перла — Рида, рис. 11.7).

Кривая Гомперца имеет аналитическое выражение

$$y_t = ka^{b^t},$$

где a , b — положительные параметры, причем $b < 1$; k — асимптота функции. Для решения экономических задач чаще всего используется случай, когда $a < 1$, $b < 1$.

В кривой Гомперца выделяются четыре участка: на первом прирост функции незначителен, на втором прирост увеличивается, на третьем прирост примерно

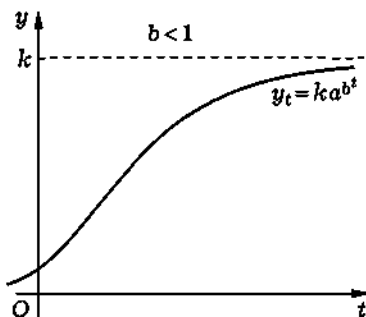


Рис. 11.6

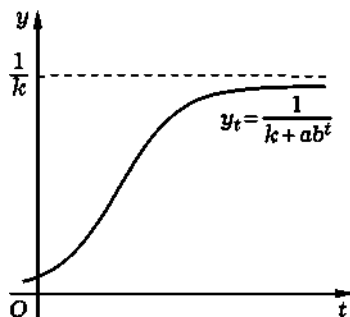


Рис. 11.7

постоянен, на четвертом происходит замедление темпов прироста и функция неограниченно приближается к значению k . В результате кривая напоминает латинскую букву S.

Логистическая кривая (кривая Перла — Рида) — возрастающая функция, наиболее часто выражаемая в виде

$$\frac{1}{y_t} = k + ab^t,$$

но используется и другое представление этой кривой:

$$y_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}.$$

В этих выражениях a и b — положительные параметры, k — предельное значение функции при стремлении $t \rightarrow \infty$. График логистической кривой близок к графику кривой Гомперца, но в отличие от последней логистическая кривая имеет точку симметрии, совпадающую с точкой перегиба. С помощью этой функции хорошо описывается развитие нового производства. В начале производства нового вида товара технические средства производства еще недостаточно разработаны, издержки производства высоки и спрос на товар мал. В дальнейшем, с увеличением спроса и усовершенствованием технических методов изготовления, производство товаров увеличивается. Наступает насыщение товаров на рынке, рост производства замедляется и наступает стабилизация выпуска товаров на определенном уровне.

Рассмотренные кривые роста, наиболее часто используемые в экономических исследованиях, могут оказать помощь при выборе типа кривой.

Существует ряд подходов, облегчающих выбор кривой роста. Это в первую очередь статистические методы, например метод последовательных разностей, характеристик прироста. Часто кривую роста выбирают исходя из значений критерия, в качестве которого принимают минимальное значение суммы квадратов отклонений фактических значений уровня от расчетных.

Однако нельзя недооценивать наиболее простой метод — визуальный. Подбирают кривую роста, форма которой соответствует реальному процессу. Если на графике временного ряда недостаточно просматривается тенденция развития, то целесообразно провести сглаживание ряда и затем подобрать кривую, соответствующую новому ряду. При этом необходимо использовать современные пакеты компьютерных программ.

Пример 7. По данным месячного выпуска продукции фирмы рассчитать:

- коэффициенты линейного тренда $y_t = a_0 + a_1 t$;
- прогноз на 1 месяц вперед;
- коэффициенты параболического тренда $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$;
- прогноз на 1 месяц вперед.

Решение. Для расчета коэффициентов линейного и параболического трендов воспользуемся выражениями, полученными из системы нормальных уравнений. Перенесем начало координат t' . Необходимые вычисления для линейного тренда занесем в табл. 11.14.

Таблица 11.14

t	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
t'	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	0
y_t	3423	3321	3210	3122	3034	2940	2845	2739	24634
$(t')^2$	49	25	9	1	1	9	25	49	168
$y_t \cdot t$	−23961	−16605	−9630	−3122	3034	8820	14225	19173	−8066

Вычислим коэффициенты линейного тренда по формулам для полинома первой степени:

$$a_0 = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{24634}{8} = 3079,25;$$

$$a_1 = \frac{\sum y_t \cdot t}{\sum t^2} = -\frac{8066}{168} = -48,01.$$

Таким образом, величина среднего уровня ряда при $t = 0$ составляет 3079,25, среднемесячное уменьшение выпуска продукции составляет 48,01.

Уравнение линейного тренда: $y'_t = 3079,25 - 48,01t'$. Прогноз на 9-й месяц составит: $y'_t = 3079,25 - 48,01 \cdot 9 = 2647,16$ (табл. 11.15).

Вычислим коэффициенты параболического тренда по формулам (11.4):

$$a_0 = 3077,05; \quad a_1 = -48,01; \quad a_2 = 0,105.$$

Таблица 11.15

T	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
t'	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	0
y_t	3423	3321	3210	3122	3034	2940	2845	2739	24634
$(t')^2$	49	25	9	1	1	9	25	49	168
$y_t \cdot t$	-23961	-16605	-9630	-3122	3034	8820	14225	19173	-8066
$(t')^3$	-343	-125	-27	-1	1	27	125	343	0
$(t')^4$	2401	625	81	1	1	81	625	2401	6216
$y_t \cdot (t')^2$	167727	83025	28890	3122	3034	26460	71125	134211	517594

Уравнение параболического тренда: $y'_t = 3077,05 - 48,01t + 0,105t^2$. Прогноз на 9-й месяц: $y'_t = 3077,05 - 48,01 \cdot 9 + 0,105 \cdot 9^2 = 2653,47$.

11.2.4. Расчет доверительных интервалов прогноза, адекватность и точность моделей

Доверительные интервалы прогноза. Прогнозные значения исследуемого показателя определяют путем подстановки в уравнение кривой времени t , соответствующей периоду упреждения. Полученный прогноз называют *точечным*.

В дополнение к точечному прогнозу можно определить границы возможного изменения прогнозируемого показателя, т.е. вычислить *интервальный прогноз*.

Если тренд характеризуется в виде прямой или полиномом второго порядка, то доверительный интервал можно представить в виде

$$y'_{n+L} \pm S_y K^*,$$

где n — длина временного ряда; L — период упреждения; y'_{n+L} — точечный прогноз на момент $n + L$; S_y^2 — дисперсия отклонений фактических наблюдений от расчетных, вычисляемая по формуле

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_t - y'_t)^2}{n - k},$$

где y_t — фактическое значение уровней ряда; y'_t — расчетные значения уровней ряда; k — число оцениваемых параметров выравнивающей кривой (для прямой $k = 2$, для параболы второй степени $k = 3$ и т.д.).

Значения K^* в зависимости от длины временного ряда и периода упреждения для прямой и параболы при доверительной вероятности 0,9 представлены в табл. 11.16.

Таблица 11.16

Длина ряда, n	Период упреждения L					
	Линейный тренд			Параболический тренд		
	1	2	3	1	2	3
7	2,6380	2,8748	3,1399	3,948	5,755	8,152
9	2,3422	2,4786	2,6310	3,144	4,124	5,408
11	2,1827	2,2718	2,3706	2,763	3,384	4,189
13	2,0837	2,1463	2,2155	2,536	2,965	3,516
15	2,0153	2,0621	2,1131	2,386	2,701	3,100
17	1,9654	2,0015	2,0406	2,280	2,521	2,823
19	1,9280	1,9568	1,9877	2,201	2,391	2,627
21	1,8975	1,9210	1,9461	2,139	2,293	2,481
23	1,8738	1,8932	1,9140	2,090	2,217	2,371
25	1,8538	1,8701	1,8876	2,049	2,156	2,284

Пример 8. Для данных о производстве угля за 9 лет (1989–1997 гг.) были оценены параметры модели

$$y'_t = 454 - 17,8t,$$

дисперсия отклонений фактических значений от расчетных составила $S_y^2 = 8,9$ млн т². Используя полученную модель, рассчитать интервальный прогноз производства в 1998 г., доверительную вероятность принять равной 0,9. Найти нижнюю и верхнюю границы прогноза.

Решение. Определим точечный прогноз:

$$y'_{10} = 454 - 17,8 \cdot 10 = 276 \text{ (млн т)}.$$

Вычислим интервальный прогноз. По данным задачи $n = 9$, $L = 1$, тренд линейный, по таблице $K^* = 2,3422$, $S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{8,9} = 2,98$. В результате находим:

$$y'_{n+L} \pm S_y K^* = 276 \pm 2,98 \cdot 2,3422 = 276 \pm 6,98.$$

Итак, точечный прогноз составляет 276 млн т; нижняя граница прогноза 269,02 млн т; верхняя граница прогноза 282,98 млн т.

Проверка адекватности моделей. Независимо от вида выбранной модели вопрос о возможности ее применения для прогнозирования экономического показателя может быть решен только после установления адекватности.

Проверка адекватности выбранных моделей реальному процессу строится на анализе случайной компоненты. Случайная компонента получается после

выделения из исследуемого ряда тренда и периодической составляющей. Если временной ряд не имеет сезонных колебаний, то для аддитивной модели

$$y_t = u_t + e_t.$$

Ряд остатков может быть получен как отклонения фактических уровней y_t от расчетных y'_t :

$$e_t = y_t - y'_t.$$

При использовании кривых роста y'_t вычисляют, подставляя в уравнение кривой соответствующие значения времени.

Считают, что модель адекватна описываемому процессу, если значения остаточной компоненты удовлетворяют свойствам случайности, независимости и она подчиняется нормальному закону распределения.

При правильном выборе вида тренда отклонения от него будут носить случайный характер, и изменение остаточной случайной величины не связано с изменением времени. По выборке, полученной для всех временных значений на рассматриваемом интервале, проверяется гипотеза о независимости последовательности значений e_t от времени или наличие тенденции в ее изменении. Для проверки этого свойства может быть использован критерий определения тенденции с помощью «восходящих» и «нисходящих» серий.

Если вид функции тренда выбран неудачно, то последовательные значения остатков ряда могут не обладать свойствами независимости, так как могут коррелировать между собой. В этом случае говорят, что имеет место автокорреляция ошибок.

Наиболее распространенным приемом обнаружения автокорреляции является метод Дарбина — Уотсона, связанный с автокорреляцией между соседними остаточными членами ряда. Определяется критерий Дарбина — Уотсона по формуле

$$d = \sum \frac{e_t - e_{t-1}^2}{\sum e_t^2}.$$

Применение критерия основано на сравнении величины d , рассчитанной по формуле, с теоретическими значениями d_1 и d_2 , взятыми из табл. 11.17 (k — число независимых переменных; см. также табл. 7 из приложения). Когда в остатках имеется положительная автокорреляция, то при этом:

- если $d < d_1$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается;
- если $d > d_2$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается;
- если $d_1 \leq d \leq d_2$, то нет достаточных оснований для принятия решений.

Когда расчетное значение $d > 2$, то в e_t существует отрицательная автокорреляция и со значениями d_1 и d_2 сравнивается величина $4 - d$.

Таблица 11.17

N	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	D_1	D_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,9	1,71
19	1,18	1,4	1,08	1,53	0,97	1,68
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66

В связи с тем что временные ряды экономических показателей невелики, на основе анализа показателей асимметрии и эксцесса можно произвести проверку ряда остатков на нормальность распределения по формулам:

$$A = \frac{\sum e_t^3}{n} \sqrt{\left(\frac{\sum e_t^2}{n}\right)^3}, \quad \mathfrak{E} = \frac{\sum e_t^4}{n} \sqrt{\left(\frac{\sum e_t^2}{n}\right)^2 - 3},$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}, \quad \sigma_{\mathfrak{E}} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}},$$

где A — выборочная характеристика асимметрии; $\mathfrak{E}$ — выборочная характеристика эксцесса; σ_A — среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики асимметрии; $\sigma_{\mathfrak{E}}$ — среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики эксцесса.

Если одновременно выполняются неравенства

$$|A| < 1,5\sigma_A; \quad \left| \mathfrak{E} + \frac{6}{n+1} \right| < 1,5\sigma_{\mathfrak{E}},$$

то гипотеза о нормальном законе распределения случайной компоненты не отвергается. Если же выполняется хотя бы одно из неравенств

$$|A| > 2\sigma_A; \quad \left| \mathfrak{E} + \frac{6}{n+1} \right| > 2\sigma_{\mathfrak{E}},$$

то гипотеза о нормальном законе распределения отвергается.

Характеристики точности моделей. О точности модели можно судить по величине ошибки прогноза. *Ошибка прогноза* — величина, характеризующая разницу между фактическим и прогнозным значением показателя.

Абсолютная ошибка прогноза определяется формулой

$$\Delta_t = y'_t - y_t,$$

где y'_t — прогнозное значение показателя; y_t — фактическое значение.

На практике используется *относительная ошибка прогноза*

$$\delta_t = \frac{y'_t - y_t}{y_t} \cdot 100.$$

Средние абсолютные и относительные ошибки по модулю:

$$|\Delta_t| = \frac{\sum |y'_t - y_t|}{n}; \quad |\delta_t| = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y'_t - y_t}{y_t} \right| \cdot 100.$$

Если абсолютная и относительная ошибки больше нуля, то это свидетельствует о завышенной прогнозной оценке, если меньше нуля, то оценка заниженная.

Пример 9. По данным об объеме перевозок грузов и прогнозам по двум моделям (табл. 11.18) найти относительную ошибку по модулю и среднюю абсолютную ошибку по модулю.

Таблица 11.18

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	268	267	258	262	254	257	263
Прогноз 1-й модели	275	253	250	269	253	248	250
Прогноз 2-й модели	260	275	253	278	263	251	269

Решение. Результаты расчета относительной ошибки и средней абсолютной ошибки по заданным моделям заносим в табл. 11.19.

Таблица 11.19

t	1	2	3	4	5	6	7	Средняя ошибка
y_t	267	267	258	262	253	257	263	
Прогноз 1-й модели	275	253	250	269	253	248	250	
Прогноз 2-й модели	260	275	253	278	263	251	269	
Абсолютная ошибка по модулю 1-й модели	8	14	8	7	1	9	13	8,57
Абсолютная ошибка по модулю 2-й модели	8	8	5	16	9	6	6	8,29
Относительная ошибка по модулю 1-й модели	2,985	5,243	3,101	2,672	0,394	3,502	4,943	3,263
Относительная ошибка по модулю 2-й модели	2,985	2,996	1,938	6,107	3,543	2,335	2,281	3,169

По расчетам предпочтительнее вторая модель, так как для нее средняя абсолютная и средняя относительная ошибки меньше.

Упражнения

11.1. Месячные объемы продаж фирмы (ден. ед.) приведены в табл. 11.20. Проверить аномальность уровней $t = 5$ и $t = 7$.

Т а б л и ц а 11.20

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	70	66	65	71	79	76	23	82	84	73	75	82

11.2. Недельные изменения курса акций (ден. ед.) акционерного общества представлены в табл. 11.21. С помощью критерия «восходящих» и «нисходящих» серий с вероятностью 0,95 сделать вывод о присутствии или отсутствии тенденции во временном ряду.

Т а б л и ц а 11.21

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	258	256	257	259	256	258	257	254	253	255

Продолжение

t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	260	262	259	255	252	256	258	260	263	261

11.3. Квартальные объемы перевозок (ден.ед.) транспортного предприятия даны в табл. 11.22. Рассчитать трех- и пятилетние скользящие средние (результаты сравнить графически) и пятилетнюю взвешенную скользящую среднюю.

Т а б л и ц а 11.22

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	21,4	23,2	27,1	32	29,5	30,2	35,1	38,8	30,2	33,6	36,2	39

11.4. В табл. 11.23 представлены квартальные данные об объеме производства продукции (ден. ед.). Определить прогноз производства в третьем квартале 2002 г. с помощью среднего прироста.

Т а б л и ц а 11.23

Квартал	1-й 2001 г.	2-й 2001 г.	3-й 2001 г.	4-й 2001 г.	1-й 2002 г.	2-й 2002 г.
y_t	21,19	22,24	23,27	24,32	25,35	26,38

11.5. Ежеквартальная динамика процентной ставки банка дана в табл. 11.24. С помощью среднего темпа роста определить прогноз процентной ставки банка в четвертом квартале 2002 г.

Т а б л и ц а 11.24

Квартал	1-й 2001 г.	2-й 2001 г.	3-й 2001 г.	4-й 2001 г.	1-й 2002 г.	2-й 2002 г.	3-й 2002 г.
y_t	7,3	7,9	8,9	9,6	10,8	11,6	13,0

11.6. Временной ряд, характеризующий изменение выпуска продукции, представлен в табл. 11.25. Используя метод «восходящих» и «нисходящих» серий с вероятностью 0,95, сделать один из следующих выводов:

- тенденция во временном ряду присутствует;
- тенденция во временном ряду отсутствует.

Таблица 11.25

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	466	464	465	466	475	473	478	467	480	458

Продолжение

t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	474	488	483	476	471	467	473	475	481	478

11.7. По критерию «восходящих» и «нисходящих» проверить наличие тенденции в изменении курса валюты (табл. 11.26). Вывод сделать с доверительной вероятностью 0,95.

Таблица 11.26

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	28,54	28,58	28,52	28,57	28,62	28,61	28,65	28,63	28,68	28,66

Продолжение

t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_t	28,71	28,72	28,70	28,74	28,76	29,0	28,95	28,97	29,04	29,05

11.8. Данные об изменении урожайности пшеницы (ц/га) за 10 лет представлены в табл. 11.27. Произвести сглаживание по трех- и пятилетней скользящей средней и по пятилетней взвешенной скользящей средней.

Таблица 11.27

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	21,2	18,1	8,7	16,3	17,3	20,9	15,4	19,7	21,7

11.9. В табл. 11.28 приведена доля докторов наук в высших учебных заведениях РФ (%) по годам. Произвести сглаживание временного ряда с использованием экспоненциальной средней, приняв параметры сглаживания $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,3$. По результатам расчетов определить, какой из сглаженных временных рядов носит более гладкий характер.

Таблица 11.28

Годы	1995	1996	1997	1998	1999
y_t	8,95	9,5	10,01	10,93	10,08

11.10. Дан временной ряд (табл. 11.29), характеризующий месячную динамику численности (чел.), занятых в сфере услуг фирмы.

Таблица 11.29

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_t	34	36	39	44	52	55	59	65	67	73	82	86	92	93	98

В предположении об изменении тенденции ряда по линейной модели найти коэффициенты тренда $y_t = a_0 + a_1 t$ и рассчитать точечный прогноз на 16-й месяц.

В предположении об изменении тенденции ряда по параболической модели найти коэффициенты тренда $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ и точечный прогноз на 16-й месяц.

В предположении об изменении тенденции ряда по показательной модели найти коэффициенты тренда $y_t = ab^t$ и определить точечный прогноз на 16-й месяц.

11.11. Для прогнозирования временного ряда объема реализованной продукции выбрана линейная модель $y_t = a_0 + a_1 t$. Длина временного ряда $n = 24$, значение критерия Дарбина — Уотсона $d = 1,4$. Определить справедливость одного из следующих вариантов адекватности модели:

- модель неадекватна реальному процессу по данному критерию;
- модель адекватна реальному процессу по данному критерию;
- нет достаточных оснований для принятия решения об адекватности модели.

11.12. В табл. 11.30 приведены данные об объеме автомобильных перевозок фирмы (тыс. т). В табл. 11.31 приведены прогнозные значения этого показателя, полученные по 1-й и 2-й моделям. Сравнить точность 1-й и 2-й моделей на основе средней относительной ошибки по модулю и определить, какая модель является более точной.

Таблица 11.30

Месяц	01.03	02.03	03.03	04.03	05.03	06.03	07.03
t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	268	267	258	262	254	257	263

Таблица 11.31

t	1	2	3	4	5	6	7
1-я модель, y_t	275	253	250	269	253	248	250
2-я модель, y_t	260	275	253	278	263	251	269

1. Таблица значений функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3354
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018

2. Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4664	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,2088	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4750	2,78	0,4973
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382	1,97	0,4756	2,80	0,4974
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4976
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2704	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,49865
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3888	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,49931
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,49966
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,499841
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,499928
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,499968
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,499997
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,500000

3. Таблица значений функции Пуассона $\frac{a^m}{m!} e^{-a}$

m	a								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	—	—	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6	—	—	—	—	—	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003

[illegible]

4. Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α							
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	6,63	5,02	3,84	2,71	0,016	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,21	7,38	5,99	4,61	0,211	0,103	0,051	0,020
3	11,34	9,35	7,81	6,25	0,584	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,49	7,78	1,06	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	9,24	1,61	1,15	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	10,64	2,20	1,64	1,24	0,872
7	18,48	16,01	14,07	12,02	2,83	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,53	15,51	13,36	3,49	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	14,68	4,17	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	15,99	4,87	3,94	3,25	2,56
11	24,72	21,92	19,68	17,28	5,58	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	18,55	6,30	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	19,81	7,04	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,68	21,06	7,79	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	22,31	8,55	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	23,54	9,31	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	24,77	10,09	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	25,99	10,86	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	27,20	11,65	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	28,41	12,44	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	29,62	13,24	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	30,81	14,04	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	32,01	14,85	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	33,20	15,66	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	34,38	16,47	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	35,56	17,29	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	36,74	18,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	37,92	18,94	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	39,09	19,77	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	40,26	20,60	18,49	16,79	14,95
31	52,19	48,23	44,99	41,42	21,43	19,28	17,54	15,66
32	53,49	49,48	46,19	42,58	22,27	20,07	18,29	16,36
33	54,78	50,73	47,40	43,75	23,11	20,87	19,05	17,07
34	56,06	51,97	48,60	44,90	23,95	21,66	19,81	17,79
35	57,34	53,20	49,80	46,06	24,80	22,47	20,57	18,51
36	58,62	54,44	51,00	47,21	25,64	23,27	21,34	19,23
37	59,89	55,67	52,19	48,36	26,49	24,07	22,11	19,96
38	61,16	56,90	53,38	49,51	27,34	24,88	22,88	20,69
39	62,43	58,12	54,57	50,66	28,20	25,70	23,65	21,43
40	63,69	59,34	55,76	51,81	29,05	26,51	24,43	22,16

5. Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,7	318,3	636,6
2	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
50	1,68	2,01	2,40	2,68	3,26	3,50
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
80	1,66	1,99	2,37	2,64	3,20	3,42
100	1,66	1,98	2,36	2,63	3,17	3,39
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
Число степеней свободы k	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

6. Критические точки распределения Фишера —Снедекора
(k_1 — число степеней свободы большей дисперсии;
 k_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0,01$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5624	5763	5859	5928	5981	6022	6055	6083	6106
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46

Уровень значимости $\alpha = 0,005$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38

**7. Распределение Дарбина — Уотсона
для положительной автокорреляции
при 5%-м уровне значимости**

n	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

8. Порядковые номера дней в невисокосном году

День месяца	Месяцы											
	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	–	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	–	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	–	90	–	151	–	212	243	–	304	–	365

9. Порядковые номера дней в високосном году

День месяца	Месяцы											
	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30	–	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31	–	91	–	152	–	213	244	–	305	–	366

ОТВЕТЫ

Глава 1

- 1.1.** 36. **1.2.** Да. **1.3.** 588. **1.4.** а) $\frac{1}{45}$; б) 0,01. **1.5.** 0,5. **1.6.** $\frac{24}{91}$.
1.7. 0,47. **1.8.** 0,38. **1.9.** 0,025. **1.10.** $\frac{25}{39}$. **1.11.** 0,2. **1.12.** 0,28. **1.13.** 0,4.
1.14. 0,896. **1.15.** 0,47. **1.16.** 0,69. **1.17.** Выигрыш одной партии из двух.
1.18. а) $\frac{3}{16}$; б) $\frac{13}{16}$. **1.19.** 0,046. **1.20.** 0,078. **1.21.** а) 0,4239; б) 0,5; в) 0,5.
1.22. 95. **1.23.** а) 44,5 млн руб.; б) 40,5 млн руб. **1.24.** 0,7698.

Глава 2

- 2.1.** 0,0375. **2.2.** 5010. **2.3.** 3,9. **2.4.** 0,9. **2.5.** 3,1; 1,29; -0,888;
2,7777. **2.6.** а) 5,6; б) 0,62. **2.7.** 0,25. **2.8.** а) 0; б) 0,5; в) 0,5;
г) 0. **2.9.** $\frac{1}{a}$. **2.10.** $\frac{25}{18}$. **2.11.** 0. **2.12.** $\frac{3}{2}x_0$. **2.13.** $\sqrt{3}$.
2.14. $\frac{1}{4}(b+a)(b^2+a^2)$. **2.15.** $\frac{b^7-a^7}{7(b-a)} - \left(\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right)^2$. **2.16.** 12,6.
2.17. $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{32}\right)$. **2.18.** 0,2.

Глава 3

- 3.1.** 0,41; 0,23. **3.2.** 0,29. **3.3.** 9,84. **3.4.** 0,22. **3.5.** 0,5.
3.6. а) (4,16, 6,64); б) (18,57, 21,67). **3.7.** -0,006; 0,00004.
3.8. $U_{\text{набл.}} = 5$; $u_{\text{кр.}} = 1,96$; нулевая гипотеза отвергается.
3.9. $T_{\text{набл.}} = 2$; $t_{0,05;15} = 2,13$; оснований отвергать нулевую гипотезу нет.
3.10. $U_{\text{набл.}} = 0,53$; $u_{\text{кр.}} = 1,96$; оснований отвергать нулевую гипотезу нет.

Глава 4

- 4.1.** Критический путь $a_0 - a_1 - a_2 - a_4 - a_6 - a_{10} - a_{12}$ равен 58 дней.
4.2. При нормальном режиме работ 2 критических пути: 1-2-6 и 1-2-4-6, длина пути 10 дней, стоимость работ 630 ден. ед. При максимальном режиме работ 5 критических путей: 1-2-6, 1-2-4-6, 1-4-6, 1-3-4-6, 1-3-5-6; длина пути 7 дней, минимальная стоимость работ 770 ден. ед.
4.3. При нормальном режиме работ один критический путь: 1-2-6-7; длина пути 14 дней, стоимость работ 700 ден. ед. При максимальном режиме

работ три критических пути: 1–2–6–7, 1–2–5–7, 1–4–7; длина пути 8 дней, минимальная стоимость работ 820 ден. ед.

4.4. При нормальном режиме работ один критический путь: 0–1–3–5–6; длина пути 130 дней, стоимость работ 405 ден. ед. При максимальном режиме работ два критических пути: 0–1–2–5–6, 0–1–3–5–6; длина пути 112 дней, минимальная стоимость работ 438,8 ден. ед.

4.5. Кратчайший путь $A-1-3-4-B$ длиной 120.

4.6. Кратчайший путь $A-2-5-9-B$ длиной 10.

4.7. Минимальная длина 1800 м.

4.8. Каждая партия кассет должна заменяться через 1 год, а через 5 лет списываться.

4.22. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2/5, 3/5)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (1/5, 4/5)$; $v = 22/5$.

4.23. $\bar{x}_{\text{опт}} = (3/7, 4/7)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (5/14, 0, 9/14)$; $v = 34/7$.

4.24. $\bar{x}_{\text{опт}} = (5/8, 3/8, 0)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (3/4, 1/4)$; $v = 7/4$.

4.25. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 5/9, 0, 4/9)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (4/9, 5/9)$; $v = 58/9$.

4.26. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2, 1/2)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 0, 1/2, 1/2)$; $v = 5/2$.

4.27. Предпочтительным является план выпуска товаров широкого потребления P_2 .

4.28. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0,53, 0,47)$; $v = 18266,4$ ден. ед.

Глава 5

5.1. 15062,499 руб.; 15187,5 руб.; 15375 руб.; 15750 руб.; 17250 руб.

5.2. 15%. **5.3.** 4000 дол. **5.4.** 10 лет. **5.5.** 258 дн.; 255 дн.

5.6. 113,95 тыс. руб.; 113,96721 тыс. руб. **5.7.** 1,022; 11,0227; 1,023.

5.8. 1,486; 8916 дол.; 2916 дол. **5.9.** 17,778 тыс. дол.; 2,222 тыс. дол.

5.10. 507 дн. **5.11.** 33,3%. **5.12.** 25,475 тыс. дол. **5.13.** 5%.

5.14. 24%; 82 тыс. руб. **5.15.** 29,38656 тыс. руб.; 28 тыс. руб.

5.16. 138,76 тыс. руб.; 139,06 тыс. руб.; 129,96 тыс. руб. **5.17.** 22,14 тыс. дол.

5.18. 15%; 32%. **5.19.** 1,33%; 4%; 8%. **5.20.** 2,11 года. **5.21.** 43%.

5.22. 12,36%; 12,55%; 12,68%. **5.23.** 1,718.

5.24. 950 дол.; 927,5 дол.; владельцу финансового документа выгоден вариант 2.

5.25. 9%. **5.26.** 25,37%; 1,1019.

5.27. 25,19424 тыс. руб.; 23,0563 тыс. руб.; 0,1124; 27,53043 тыс. руб.

5.28. 136,3 тыс. руб.

5.29. 22889,25 тыс. руб.; 23097,35 тыс. руб.; 23123,67 тыс. руб.; предприятию выгоднее вариант 3.

5.30. 25,2%.

5.31. 121,775 тыс. руб.; 121 тыс. руб.; заемщику выгоднее метод торговца.

5.32. Вклад выгоднее разместить в валюте.

5.33. Вклад выгоднее разместить в евро.

- 5.34.** Проект неприемлем. **5.35.** а) проект приемлем; б) проект приемлем.
5.36. 14,17%. **5.37.** а) проект приемлем; б) проект неприемлем.
5.38. Проект нецелесообразен. **5.39.** 67,59%. **5.40.** 1836 тыс. руб.; 41,55%.
5.41. Выгоднее вариант 3.

Глава 6

- 6.1.** $\bar{x}_{\text{опт}} = (1,75, 0)$, $\max L(\bar{x}) = 5,25$; $\bar{x}_{\text{опт}} = (1,75, 1,75)$, $\min L(\bar{x}) = -5,25$.
6.2. Неограниченное решение; $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 2,5)$, $\min L(\bar{x}) = 7,5$.
6.3. Неограниченное решение; $\bar{x}_{\text{опт}} = (2, 3)$, $\min L(\bar{x}) = 26$.
6.4. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1,38, 2,77)$, $\max L(\bar{x}) = 11,08$; множество решений, одно из них $x = (3, 0)$, $\min L(\bar{x}) = 0$.
6.5. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 5)$, $\max L(\bar{x}) = 15$; $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 5)$, $\min L(\bar{x}) = 15$.
6.6. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 0)$, $\max L(\bar{x}) = 0$; $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 0)$, $\min L(\bar{x}) = 0$.
6.7. Неограниченное решение; $\bar{x}_{\text{опт}} = (4,67, 6,67)$, $\min L(\bar{x}) = 11,33$.
6.11. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 3, 4, 0)$, $\max L(\bar{x}) = 7$.
6.12. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 1, 2, 0, 1)$, $\min L(\bar{x}) = 12$.
6.13. $\bar{x}_{\text{опт}} = (6,4, 2,4, 0,4, 0,0)$, $\max L(\bar{x}) = 8,2$.
6.14. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1, 3, 2, 0, 0)$, $\min L(\bar{x}) = 1$.
6.15. Нет решения.
6.16. $\bar{x}_{\text{опт}} = (4, 0, 0)$, $\min L(\bar{x}) = 4$.
6.17. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 3, 0, 0)$, $\max L(\bar{x}) = 3$.
6.18. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1, 0, 0, 0,67)$, $\max L(\bar{x}) = 0,33$.
6.19. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2,5, 0,25, 0, 0)$, $\min L(\bar{x}) = 2,75$.
6.20. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 0, 4,5)$, $\max L(\bar{x}) = 18$.
6.27. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 1, 3)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (1, 0)$; $\min L(\bar{x}) = \max S(\bar{y}) = 4$.
6.28. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2, 1, 0, 0)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (1, 1)$; $\max L(\bar{x}) = \min S(\bar{y}) = 5$.
6.29. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0,8, 1,4, 0, 0)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (1,2, 0,2)$; $\max L(\bar{x}) = \min S(\bar{y}) = 3,8$.
6.30. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 10,5, 0, 6,5)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (1, 0,5)$; $\min L(\bar{x}) = \max S(\bar{y}) = 13$.
6.31. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1,5, 0,25, 0)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (0,25, 0,75)$; $\max L(\bar{x}) = \min S(\bar{y}) = 1,25$.
6.32. $\bar{x}_{\text{опт}} = (4, 2, 0, 0)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (-1, 4)$; $\max L(\bar{x}) = \min S(\bar{y}) = 6$.
6.33. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 2, 0, 4)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (-1, 0)$; $\min L(\bar{x}) = \max S(\bar{y}) = -2$.
6.34. $\bar{x}_{\text{опт}} = (6, 0, 14, 0)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (0,25, 0,75)$; $\max L(\bar{x}) = \min S(\bar{y}) = 14$.
6.35. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$; $\bar{y}_{\text{опт}} = (-0,2, -0,8, 0)$; $\min L(\bar{x}) = \max S(\bar{y}) = -11$.
6.36. Нет решения.

6.38. Табл. 6.52: $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 30 \\ 50 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$; $\min L(X) = 490$.

Табл. 6.53: $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 30 & 120 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 100 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\min L(X) = 1900$.

Табл. 6.54: $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 20 & 10 & 40 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$; $\min L(X) = 830$.

Табл. 6.55: $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 90 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 20 \end{pmatrix}$; $\min L(X) = 3120$.

6.39. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$; $\min L(X) = 135$.

6.40. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 0 & 140 \\ 0 & 170 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 110 & 0 \end{pmatrix}$; $\min L(X) = 1800$.

6.41. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 1000 \\ 0 & 1200 & 0 \\ 1500 & 300 & 0 \end{pmatrix}$; $\min L(X) = 10790$.

6.42. Вариант 2; $\min L(X_2) = 8765$.

6.43. $\bar{x}_{\text{цел}} = (2, 4)$; $L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 68$. **6.44.** $\bar{x}_{\text{цел}} = (5, 0)$; $L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 10$.

6.45. $\bar{x}_{\text{цел}} = (1, 1)$; $L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 4$. **6.46.** $\bar{x}_{\text{цел}} = (1, 1)$; $L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 5$.

6.47. $\bar{x}_{\text{цел}} = (1, 2)$; $L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 3$. **6.48.** $\bar{x}_{\text{цел}} = (0, 1, 2, 14)$; $L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 42$.

6.49. $\bar{x}_{\text{цел}} = (2, 7)$; $L(\bar{x}_{\text{цел}}) = 25$ т.

6.50. Задача имеет два решения, одно из них:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \min L(X) = 10.$$

6.51. Задача имеет несколько решений, одно из них:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \min L(X) = 13.$$

6.52. Задача имеет несколько решений, одно из них:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \min L(X) = 208 \text{ км.}$$

6.53. Задача имеет несколько решений, одно из них:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \min L(X) = 10.$$

6.54. Задача имеет несколько решений, одно из них:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \min L(X) = 7892 \text{ тыс. ден. ед.}$$

6.55. $\bar{x}_{\text{комп}} = (1, 1, 43)$. **6.56.** $\bar{x}_{\text{комп}} = (1, 68, 1, 74)$. **6.57.** $\bar{x}_{\text{комп}} = (0, 1, 6)$.

6.58. $\bar{x}_{\text{комп}} = (0, 0)$. **6.59.** $\bar{x}_{\text{комп}} = (2, 2, 55)$. **6.60.** $\bar{x}_{\text{комп}} = (5, 4)$.

6.61. $\bar{x}_{\text{комп}} = (1, 36, 1)$.

6.62. $\lambda \in [1, 2]$, $\bar{x}_{1\text{опт}} = \left(\frac{9}{7}, \frac{24}{7}\right)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = -\frac{9}{7}\lambda - \frac{24}{7}$;

$\lambda \in [2, 11]$, $\bar{x}_{2\text{опт}} = (3, 0)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = -3\lambda$.

6.63. $\lambda \in \left[-\infty, -\frac{29}{2}\right]$, $\bar{x}_{1\text{опт}} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = \frac{15}{2}$;

$\lambda \in \left[-\frac{29}{2}, 3\right]$, $\bar{x}_{2\text{опт}} = (4, 1)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 22 + \lambda$;

$\lambda \in [3, \infty]$, $\bar{x}_{3\text{опт}} = (1, 4)$, $L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 13 + 4\lambda$.

6.64. $\lambda \in \left[-\infty, -\frac{5}{4}\right]$, $\bar{x}_{1\text{опт}} = (10, 0)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = 20$;

$\lambda \in \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right]$, $\bar{x}_{2\text{опт}} = (11, 1)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 25 + 4\lambda$;

$\lambda \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right]$, $\bar{x}_{3\text{опт}} = (3, 9)$, $L(\bar{x}_{3\text{опт}}) = 33 + 36\lambda$.

6.65. $\lambda \in [-1, 0]$, $\bar{x}_{1\text{опт}} = \left(\frac{18}{7}, \frac{5}{7}, 0, 0, 0\right)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = 4\frac{13}{7}$;

$\lambda \in [0, 4]$, $\bar{x}_{2\text{опт}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, \frac{20}{3}\right)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 4 - \lambda$.

6.66. $\lambda \in [-1, 0]$, $\bar{x}_{1\text{опт}} = \left(\frac{18}{7}, \frac{5}{7}, 0, 0, 0\right)$, $L(\bar{x}_{1\text{опт}}) = 4\frac{13}{7}$;

$\lambda \in [0, 4]$, $\bar{x}_{2\text{опт}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, \frac{20}{3}\right)$, $L(\bar{x}_{2\text{опт}}) = 4 - \lambda$.

$$\mathbf{6.67.} \quad \lambda \in [0, 1], \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 50 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 30 & 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(X_1) = 1570 + 300\lambda;$$

$$\lambda \in [1, 2], \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 80 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 70 & 100 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(X_2) = 1630 + 240\lambda.$$

$$\mathbf{6.68.} \quad \lambda \in [0, 4], \quad X_1 = \begin{pmatrix} 90 & 10 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 30 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad L(X_1) = 830 + 20\lambda;$$

$$\lambda \in [4, 9], \quad X_1 = \begin{pmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 30 & 0 & 60 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(X_1) = 910.$$

Глава 7

$$\mathbf{7.4.} \quad \bar{x} = (4, 5, 1, 5), \quad L_{\min} = 2,5; \quad \bar{x} = (0, 4), \quad L_{\max} = 40.$$

$$\mathbf{7.5.} \quad \bar{x} = \left(\frac{9}{13}, \frac{32}{13} \right), \quad L_{\min} = \frac{1300}{169}; \quad \bar{x} = (0, 0), \quad L_{\max} = 25.$$

$$\mathbf{7.6.} \quad \bar{x} = (4, 3), \quad L_{\min} = 0; \quad \bar{x} = (13, 10, 5), \quad L_{\max} = 137,25.$$

$$\mathbf{7.9.} \quad \bar{x} = (3, 2), \quad L_{\min} = 0; \quad \bar{x} = (0, 6), \quad L_{\max} = 25.$$

$$\mathbf{7.10.} \quad \bar{x} = (2, 1), \quad L_{\min} = 0; \quad \bar{x} = (5, 0), \quad L_{\max} = 10.$$

$$\mathbf{7.11.} \quad \bar{x} = (1, 4) \text{ и } \bar{x} = (4, 1), \quad L_{\min} = 17; \quad \bar{x} = \left(7, \frac{4}{7} \right), \quad L_{\max} = \frac{2417}{49}.$$

$$\mathbf{7.12.} \quad \bar{x} = (2, 3), \quad L_{\min} = \frac{3}{5}; \quad \bar{x} = (4, 1), \quad L_{\max} = \frac{11}{5}.$$

$$\mathbf{7.14.} \quad \bar{x} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{13}{6}, \frac{5}{12} \right), \quad L_{\min} = -\frac{25}{26}.$$

$$\mathbf{7.15.} \quad \bar{x} = (1, 1, 1), \quad L_{\max} = 2.$$

$$\mathbf{7.16.} \quad \bar{x} = (1, 1, 1), \quad L_{\max} = 2.$$

$$\mathbf{7.17.} \quad \bar{x} = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right), \quad L_{\max} = -\sqrt{6}.$$

$$\mathbf{7.19.} \quad \bar{x} = (99, 101), \quad L_{\min} = 20398 \text{ ден. ед.}$$

$$\mathbf{7.20.} \quad \bar{x} = \left(\frac{8}{15}, \frac{17}{15} \right), \quad f_{\min} = \frac{38}{15}.$$

$$\mathbf{7.21.} \quad \bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 4 \right), \quad f_{\max} = \frac{65}{4}.$$

$$\mathbf{7.22.} \quad \bar{x} = (0, 4), \quad f_{\max} = 16.$$

7.23. $\bar{x} = \left(0, 1, \frac{3}{4}\right), f_{\max} = \frac{17}{8}.$

7.24. Оборудование заменить через 3 года.

7.25. Оборудование заменить через 4 года.

7.26. В первый населенный пункт направить 1 автолавку, во второй — 3 автолавки, в третий — 1 автолавку; при этом товарооборот будет максимальный и составит 64 тыс. ден. ед.

7.27. Целесообразно инвестировать третьему заводу 50 млн ден. ед., четвертому заводу — 150 млн ден. ед.; при этом прирост выпуска продукции будет максимальный и равен 146 млн ден. ед.

7.28. В первой области целесообразно построить 2 предприятия, в третьей — 3 предприятия; при этом затраты на строительство и эксплуатацию будут минимальные и составят 146 млн ден. ед.

7.29. $x_{\text{опт}} = (в, в, с, с, в, с),$ минимальные затраты равны 35 тыс. ден. ед.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976.
3. *Бережная Е.В.* Математические методы моделирования экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2002.
4. *Бывшие В.А.* Введение в эконометрию. – Ч. 2. – М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, 2003.
5. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998.
6. *Гринин С.А.* Математическое моделирование в экологии / С.А. Гринин, Н.А. Орехов, В.П. Новиков. – М.: ЮНИТИ, 2003.
7. *Дугерти К.* Введение в эконометрику. – М.: Инфра-М, 2001.
8. *Ковалев В.В.* Курс финансовых вычислений / В.В. Ковалев, В.А. Уланов. – М.: Финансы и статистика, 2002.
9. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Питер, 2002.
10. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей. – 4-е изд. – М.: Дело, 2003.
11. *Красс М.С.* Математика в экономике. Основы математики. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005.
12. *Красс М.С.* Математические методы и модели для магистрантов экономики / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.-СПб.: Питер, 2004.
13. *Красс М.С.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – 5-е изд. / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2006.
14. *Кремер Н.Ш.* Эконометрика / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
15. *Лабскер Л.Г.* Игровые методы в управлении экономикой / Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: Дело, 2001.
16. *Лабскер Л.Г.* Теория массового обслуживания в экономической сфере / Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: ЮНИТИ, 1998.
17. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь: словарь современной экономической науки. – М.: Дело, 2003.

18. *Лукашин Ю.П.* Финансовая математика: учеб.-практ. пособие. – М.: МЭСИ, 1999.
19. *Медоуз Д.Л.* и др. За пределами роста. – М.: Прогресс, Пангея, 1994.
20. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе / Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталева, Т.В. Хрусталева, Т.П. Барановская. – М.: Финансы и статистика, 2001.
21. *Мэнкью М. Грегори.* Макроэкономика. – М.: Изд-во МГУ, 1994.
22. *Сидоренко В.Н.* Системная динамика. – М.: ТЕИС, 1998.
23. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. – М.: Дело, 2000.
24. Эконометрика / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002.
25. Экономико-математическое моделирование / Под ред. И.Н. Дрогобыцкого. – М.: Экзамен, 2004.
26. *Уотшем Т.Дж.* Количественные методы в финансах / Т.Дж. Уотшем, К. Паррамоу: пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1999.
27. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984.
28. *Форрестер Дж.* Мировая динамика. – М.: Наука, 1978.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

À

- Абсолютный прирост 494
- Автокорреляция 483
- Аксиома индивида-потребителя 398
- Активное ограничение 263
- Акция 246
 - возвратная 247
 - именная 247
 - на предъявителя 247
 - привилегированная 246
 - простая 246
 - с плавающим дивидендом 247
- Альтернатива 177
- Альтернативный оптимум 260
- Аннуитет 215
- Асимметрия 66
 - эмпирического распределения 80

Á

- Брутто-ставка 212
- Бюджетное множество 402

Â

- Варианта 71
- Венгерский алгоритм 307
- Вероятность 13
 - безусловная 17
 - переходная 94
 - состояния системы 140
 - условная 17
- Вершина
 - висячая 103
 - достижимая 109
 - дочерняя 103
 - изолированная 98
 - инцидентная ребру 99
 - корневая 103

- Вершина нечетная 100
 - прародительская 103
 - родительская 103
 - степень 100
 - четная 100
- Вершины
 - несвязные 102
 - связные 102
 - смежные 99
- Выборка 70
 - неповторная 71
 - повторная 71
 - репрезентативная 71
- Выборочная совокупность 70
- Выкупная цена облигации 243

Ã

- Генеральная совокупность 70
- Генеральная средняя 75
- Гипотеза 24
 - конкурирующая 88
 - нулевая 88
 - о виде распределения 88
 - параметрическая 88
 - простая 88
 - сложная 88
 - статистическая 88
- Гистограмма
 - относительных частот 74
 - частот 74
- Глобальный максимум (минимум), 343
- Грани соседние 105
- Грань 105
 - бесконечная 105
- Граф 98
 - гамильтонов 107
 - конечный 98
 - несвязный 102

Граф
– ориентированный 108
– – полный 109
– плоский 104
– полный 99
– связный 102
– эйлеров 106
Графа ключевая 269
График
– календарный 118
– сетевой 118

Ä

Данные
– временные 453
– пространственные 453
Дерево 103
– остовное 110
Диверсификация 135
Дисконт 194, 206
Дисконтирование суммы 194
Дисконтный множитель 195, 206
Дисперсия 42, 57
– внутригрупповая 77
– выборочная 76
– генеральная 76
– групповая 77
– исправленная 76
– межгрупповая 77
– остаточная 51
Длина
– пути 101
– цикла 101
Доверительный интервал 85
Дополнение графа 100
Допустимое множество 132
Достижимое множество 135
Дуга 108

Ç

Задача
– выпуклого программирования 357
– квадратичного программирования 359
– о назначениях 306

Задача линейного программирования
– двойственная 275
– – несимметричная 275
– – симметричная 275
– – смешанная 275
– неразрешимая 262
Закон
– Госсена 399
– больших чисел 93
– убывающей эффективности производства 391
Закон распределения 34
– Пуассона 38
– биномиальный 37
– двумерной случайной величины 47
Запасы предприятия 412
Золотое правило 429

È

Игра
– антагонистическая двух лиц с нулевой суммой 161
– бескоалиционная 160
– кооперативная 160, 174
– множественная 160
– некооперативная 160
– парная 160
– позиционная 176
– с седловой точкой 162
Издержки
– связанные с дефицитом 413
– содержания запасов 413
Изокванта 391
Изоклина 392
Индекс
– детерминации 471
– инфляции 211
– покупательной способности 211
– цен 211
Индекс корреляции 469
Индексная строка 269
Интеграл вероятностей 28
Интенсивность потока 139, 144
– приведенная 149

Инфляционная премия 212

Источник 108

Исход 13

Ё

Канал обслуживания 140

Капитализация процентов 199

Капиталоемкость 424

Квадратичная форма 358

– положительно (отрицательно) определенная 358

– положительно (отрицательно) полуопределенная 358

Ключевой элемент 270

Ковариация 49

Контур 109

Контур финансовой операции 230

Корреляция частная 479

Коэффициент

– корреляции 50

– множественной детерминации 480

– множественной корреляции 480

– наращения ренты 217

– приведения ренты 221

– регрессии 51

Коэффициент корреляции

– частный нулевого порядка 479

Коэффициент эластичности 468

Кривая

– Гомперца 503

– Перла — Рида 504

– Филлипса 466

– Энгеля 467

– логистическая 504

– насыщения 500

– показательная 502

– роста 500

Критерий

– «восходящих» и «нисходящих» серий 492

– Колмогорова 90

– Пирсона 90

– Стьюдента 90

– Фишера 90

Критерий

– двусторонний 89

– левосторонний 89

– правосторонний 89

– статистический 89

Критическое значение 89

Курс облигации 243

Курсовая стоимость акции 247

Ё

Лаг 483

Линия

– безразличия 400

– постоянной фондовооруженности 392

И

Максимин 162

Маржа 189

Маршрут 108

– замкнутый 108

Математическая модель задачи линейного программирования 255

– каноническая 256

– неканоническая 256

Математическое ожидание 38, 57

Матрица

– инцидентности 99, 109

– перехода системы 94

– платежная 161

– смежности 99

Медиана 62, 72

Мера риска 128

Метод

– актуарный 230

– взвешенной скользящей средней 497

– наименьших квадратов 456

– простой скользящей средней 496

– симплексный 254

– экспоненциального сглаживания 498

Многосекторная экономика 423

Многоугольник распределения 36

Множество безразличия производителя

391

Множитель наращенния 189

Мода 62, 72

Модель

– Леонтьева односекторная динамическая 424

– Солоу замкнутая динамическая 427

– Солоу открытая динамическая 427

– временного ряда

– – аддитивная 492

– – мультипликативная 492

– односекторная 423

– производственных поставок 415

– регрессионная нормальная 455, 473

– сетевая 117

– экономико-математическая 186

Момент

– корреляционный 49

– начальный 46

– теоретический 47

– центральный 46

– эмпирический 47, 79

Мост 103

Мощность критерия 90

І

Назначение 306

Наилучшее приближение 51

Накопление дивидендов 247

Наращение 188

Наращение по сложным процентам 199

Наращенная сумма 189

– потока платежей 215

Неравенство Чебышева 92

Неустойчивая монополия 178

Номинальная стоимость

– акции 247

– облигации 243

Норма замены 401

– предельная 401

Норма накопления 427

– по золотому правилу 430

Норма потребления 427

І

Область

– критическая 89

– принятия гипотезы 89

Облигация 243

– долгосрочная 243

– краткосрочная 243

– среднесрочная 243

Объем выборки 70

Организационные издержки 413

Отклонение 41

– среднее квадратическое 44

Отсутствие последействия 138

Оценка 291

– наибольшего правдоподобия 83

– несмещенная 75

– смещенная 75

– состоятельная 75

– точечная 81

– эффективная 75, 457

Оценки свободных переменных 268

Ошибка

– второго рода 89

– первого рода 89

– прогноза 509

– – абсолютная 509

– – относительная 510

І

Партия 177

Пассивное ограничение 263

Перегородка 106

Переменные

– балансовые 258

– свободные 261

Перестановка 11

Период начисления 188

Период ренты 215

Петля 99

План допустимый 258

Плоское представление графа 104

Плотность вероятности перехода 140

Плотность распределения вероятностей 55

- Поверхность безразличия 400
Подыгра 177
Позиция 177
– окончательная 177
Показатели
– базисные 494
– цепные 494
Показатель нагрузки на один канал 152
Полезность 128
Полигон
– относительных частот 74
– частот 74
Полная группа событий 13
Полустепень
– захода 108
– исхода 108
Портфельный анализ 133
Потенциал 291
Поток 139
– без последствий 139
– заявок 141
– платежей 215
– событий
– – регулярный 139
– – стационарный 139
Поток событий
– простейший 139
– пуассоновский 139
Правило «прямоугольника», 270
Правило торговца 230
Предельная норма замены 404
Предельная норма замещения 387
– постоянная 392
Предельная полезность денег 405
Предельная производительность цены 406
Предельные полезности продуктов 398
Приведение 194
Приведенная величина 206
Принцип неравноценности денег 187
Природная ресурсоотдача 436
Природоемкость 435
Прогноз 488
– долгосрочный 488
– интервальный 506
Прогноз
– краткосрочный 488
– оперативный 488
– среднесрочный 488
– точечный 506
Прогнозирование 488
Программирование
– динамическое 342, 363
– линейное 255
– нелинейное 342
Производительность предельная 385
Пропускная способность СМО, 141
Процентная ставка 188, 215
– номинальная 203
– переменная 189, 243
– плавающая 189, 243
– постоянная 189
– простая 189
– сложная 189
– фиксированная 243
– эффективная 204
Процентное число 233
Процентные деньги 188
Проценты 188
– «во 100», 189
– «на 100», 189
– «со 100», 189
– коммерческие 191
– непрерывные 188
– обыкновенные 191
– точные 191
Прямая средней квадратической регрессии 51
Путь 101, 109, 118
– гамильтонов 107
– критический 118
– простой 101
– эйлеров 106
- Д**
- Работа 118
– фиктивная 118
Равенство Маркова 94
Размах варьирования 72

Размер партии 413
Размещение 12
Распределение
– выборки статистическое 72
– нормальное нормированное 61
– нормальное общее 61
– равномерное 59
– эмпирическое 65
Рассеяние 42
Ребра смежные 99
Ребро 98
– инцидентное вершине 99
– ориентированное 108
Регрессия
– линейная двумерная 454
– множественная 476
– нелинейная 464
Рента
– p -срочная 215, 219
– бесконечная 216
– верная 216
– вечная 216
– годовая 215
– немедленная 216
– ограниченная 216
– отложенная 216
– отсроченная 216
– переменная 215
– постнумерандо 216
– постоянная 215
– пренумерандо 216
– с конечным числом членов 216
– условная 216
– финансовая 215
Ресурс
– возобновимый 434
– дефицитный 264
– невозобновимый 434
– недефицитный 264
Ресурсная экосистема 434
Решение 257
– Парето-оптимальное 175
– базисное 257
– допустимое 258

Решение
– опорное 257, 266
– оптимальное 257
Решение стационарное 425
Риск 127
– инвестиционный 127
Ряд
– вариационный 71
– временной 489
– динамики 489
– динамический 489
– интервальный 489
– моментный 489
– производный 489

Ñ

СМО, 140
– однофазная 142
– открытая 142
– предельный режим 145
– с ожиданием 142
– с отказами 141
– смешанного типа 142
– упорядоченная 142
Сбалансированный рост 429
Сглаживание временного ряда 496
Седловая точка
– матрицы 162
– функции Лагранжа 357
Серия 493
Сила роста 209
Симплексная таблица 269
Система 138, 444
– природно-продуктовая 435
– эколого-экономическая 433
Система массового обслуживания 140
Система ограничений 255
Случайная величина 34
– дискретная 34
– непрерывная 34, 53
Случайная компонента временного
ряда 492

Случайные величины
– коррелированные 50
– некоррелированные 50
– слабо коррелированные 51
Случайный процесс 138
– дискретный 138
– марковский 138
– непрерывный 138
Событие 118
– достоверное 11
– невозможное 11
– случайное 11
– элементарное 13
События
– независимые 19
– неоднородные 139
– несовместные 13
– однородные 139
– произведение 17
– противоположные 16
– совместные 22
– сумма 15
Современная величина 194
– потока платежей 215
Современная стоимость 206
Сопоставимость уровней ряда 490
Сочетание 12
Среднее квадратическое отклонение 44
– выборочное 76
– генеральное 76
Среднее число занятых каналов 149
Средний показатель эластичности 468
Средняя квадратическая регрессия 51
Средняя плотность потока 139
Средняя производительность 385, 388
– цены 406
Средняя фондоотдача 388
Срок ренты 215
Стандартизованное уравнение 484
Стандартизованный масштаб 484
Статистика 89
Статистическая гипотеза 88
Степень вершины 100
Сток 108

Стратегия 161
– оптимальная 161
– смешанная 163
Строка ключевая 269

О

Тариф 287, 289
Текущая стоимость 194, 206
Темп
– прироста 494
– роста 494
Темп инфляции 211
Теория игр 160
Тест 89
Точка локального рыночного равновесия 404
Точка равновесия (по Нэшу), 175
Точка спроса 405
Траектория развития
– стационарная 428
Транспортная задача 287
– закрытая 288
– открытая 288
Тренд 492
Триангуляция графа 106

О

Управление 363
Уравнение эквивалентности 234
Уравнения Колмогорова 140
Уровень значимости 85
Уровень ряда 489
Уровень удовлетворения 398
Учет 194
– банковский 206
– математический 206
Учетная ставка 195
– номинальная 207
– сложная годовая 207
– эффективная 207
Учетный множитель 206

О

Фондовооруженность 388
– по золотому правилу 429

Формула

- Бернулли 26
- Пуассона асимптотическая 38
- Эйлера 106
- простых процентов 189

Формулы

- Байеса 24
- удвоения 200
- Формулы Эрланга 149

Функция

- Лагранжа 357
- вогнутая 357
- выпуклая 356
- полезности 398
- производственная 381
- – Леонтьева 395
- – линейная 383, 396
- – многофакторная 381
- – мультипликативная 383
- – неоклассическая 385
- – однофакторная 381
- – с постоянными пропорциями 395
- – статическая 382
- распределения 52
- спроса 405
- целевая 255
- – неограниченная 262
- Функция правдоподобия 83, 84
- Функция распределения
- теоретическая 73
- эмпирическая 73
- Функция случайная 138

Ö

- Цена игры 162
- верхняя 162
- нижняя 162

Центральная предельная теорема 93

- Цепь Маркова 93
- однородная 94
- Цикл 101
- гамильтонов 107
- простой 101
- эйлеров 106

x

- Частный коэффициент эластичности 406
- Частота
- относительная 72
- события относительная 31
- Член ренты 215

Y

- Эконометрика 452
- Экономическая динамика 423
- Экстремум 261
- Экспесс 66
- эмпирического распределения 80
- Эластичность
- выпуска 386
- замещения факторов 393
- производства 386
- Энергоемкость 435
- Эффективное множество портфелей 136

B

Ячейка

- занятая 289
- незанятая 289
- условно занятая 289

Учебное издание

**Красс Максим Семенович
Чупрынов Борис Павлович**

**МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ**

Заведующая редакцией *Л.А. Табакова*
Ведущий редактор *Л.Д. Григорьева*
Младший редактор *Н.А. Федорова*
Художественный редактор *Ю.И. Артюхов*
Технический редактор *Т.С. Маринина*
Корректоры *Г.Д. Кузнецова, Г.В. Хлопцева*
Компьютерная верстка *А.Н. Канатникова*
Оформление художника *В.П. Григорьева*

ИБ № 4968

Подписано в печать 19.03.2007. Формат 70×100/16

Печать офсетная. Гарнитура «Таймс»

Усл.п.л. 44,2. Уч.-изд.л. ??,?

Тираж 3000 экз. Заказ «С» 070

Издательство «Финансы и статистика»

101000, Москва, ул. Покровка, 7

Телефон (495) 625-35-02, факс (495) 625-09-57

E-mail: mail@finstat.ru <http://www.finstat.ru>

ООО «Великолукская городская типография»

182100, Псковская область, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12

Тел./факс (811-53) 3-62-95 E-mail: zakaz@veltip.ru